三角比と三角関数

石川県立大聖寺実業高等学校
中川　忠海

ねらい

　三角比の起源は古代エジプトでナイル川が氾濫したときに区画整理をするのに考えられたと伝えられています．また三角比を拡張して考えられたものが三角関数です．三角比は直角三角形の比を角度に対応させたもので,関数的な考え方がイメージできることが大切です.
三角関数では単位円で考えることが多いのですが,基本はあくまで直角三角形のイメージです.
自然現象を解明するときの重要な関数の 1 つの三角関数を考えていきたいと思います．ここでは証明などは厳密ではなく直感的に扱っています.
テーマの概要
　前半は三角比を扱っており,鈍角における三角比の定義からはじまって,相互関係,性質,鈍角への拡張そして図形の応用として,三角形の面積,正弦定理,余弦定理などの説明とそれらが利用できることを目標にします．後半は三角比から三角関数への拡張として一般角で三角関数を考えていきます.
　加法定理,2 倍角,合成の公式などを使えるようにします．また弧度法を考えることにより,扇形の面積,周の長さを求めたり,三角関数のグラフを書けるようにします．三角比は三角関数の特殊な場合として考えることができます．物事を抽象化するときの考え方の基本です．最後に簡単に応用例として,単振動,音の合成への発展を簡単に紹介しています.

目次

三角比

1. タンジェント

いくつかの相似な三角形があるが
どの三角形においても

$$\frac{\text{高さ}}{\text{底辺}} = \frac{1}{2}$$

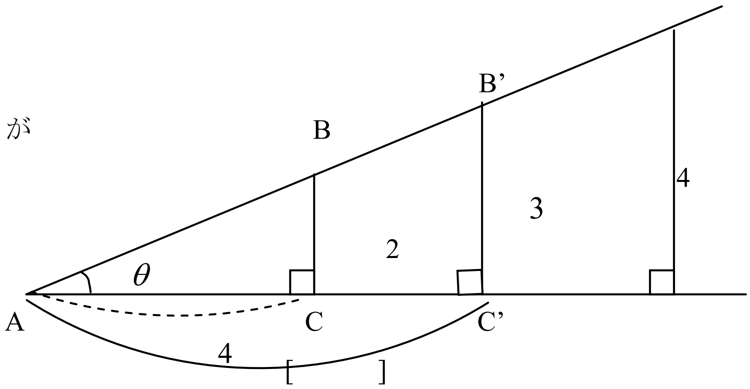
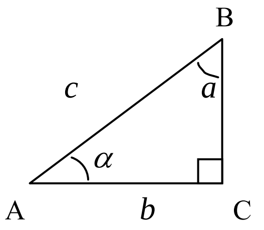


図 1.1　三角形の相似

つまり　この値は
三角形の大きさに（関係なく）
（角の大きさ）によって決まる
角 α に対して高さと底辺の 2 辺の比を対応させた関数をタンジェントとよぶ

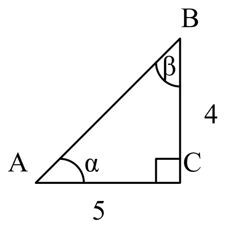
タンジェント

$$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}} \qquad (1.1)$$

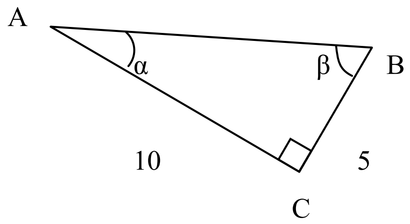


練習 1　次の三角形について　$\tan\alpha$, $\tan\beta$ を求めよ

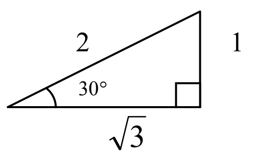
(1)

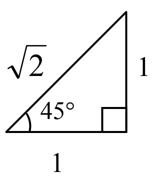


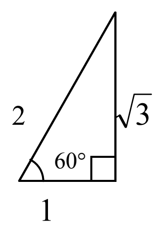
(2)



練習 2
30°, 45°, 60° のタンジェントの値を求めよ.







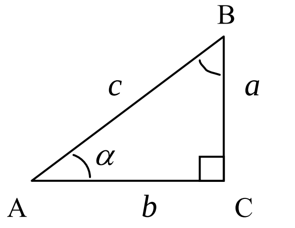
$\tan 30°$　　　　$\tan 45°$　　　　$\tan 60°$

２.サイン

角αに対して高さと斜辺の比を対応させる

サイン

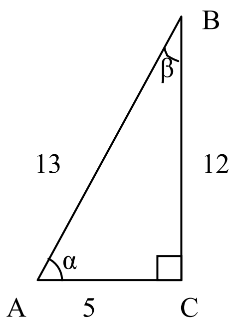
$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$



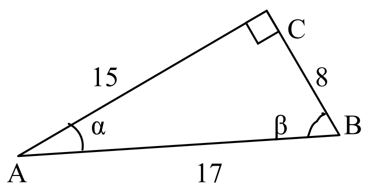
(2.1)

練習 1　次の三角形について $\sin\alpha$,$\sin\beta$ を求めよ

(1)



(2)



練習 2　次の値を求めよ.

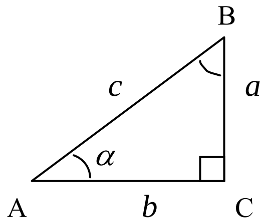
$\sin 30^\circ$　　　$\sin 45^\circ$　　　$\sin 60^\circ$

３．コサイン

角αに対して底辺と斜辺の比を対応させる

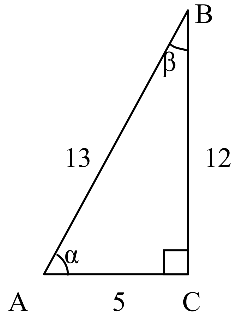
コサイン

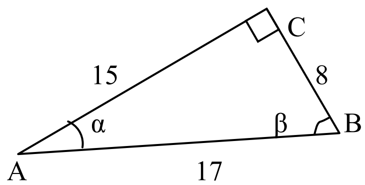
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \qquad (3.1)$$



練習 1　次の三角形について $\cos\alpha$, $\cos\beta$ を求めよ

(1)





練習 2　次の値を求めよ.

$\cos 30°$　　　$\cos 45°$　　　$\cos 60°$

４. 相互関係（鋭角）

三角比の 1 つがわかったとき残りの三角比を求めよう.

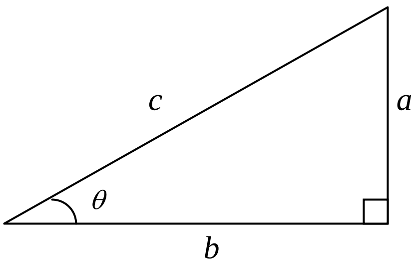


図 4.1　三角比

$$\sin\theta = \frac{a}{c} \quad \cos\theta = \frac{b}{c} \quad \tan\theta = \frac{a}{b} \tag{4.1}$$

（三平方の定理　$a^2 + b^2 = c^2$）

練習 1　次の値がわかっているとき残りの 2 つの三角比を求めよ.

(1)　$\sin\theta = \dfrac{12}{13}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

(3)　$\tan\theta = 3$

5. 鈍角の三角比

鈍角の三角比について考えてみよう.

三角比を鈍角でも使えるように拡張してみる.

中心原点,半径rの円周上の点 P(x, y)として OP のなす角度θとする.

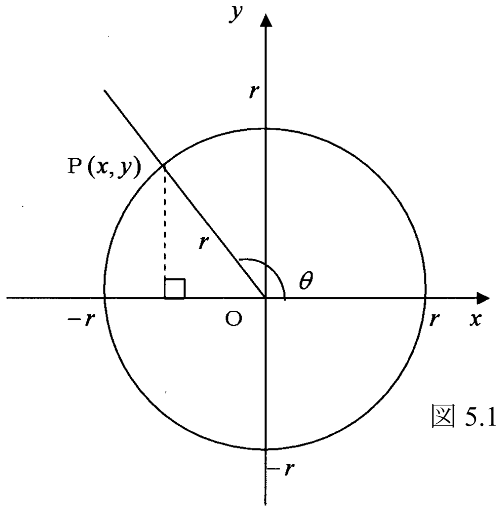


図 5.1 鈍角の三角比

次のように鈍角の場合に三角比を定める.

$$\boxed{\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)} \tag{5.1}$$

練習 1

$\theta = 30°$

$\theta = 150°$

$\theta = 45°$

$\theta = 135°$

$\theta = 60°$

$\theta = 120°$

6. 相互関係（鈍角）

練習 1　三角比の 1 つがわかったとき残り 2 つの三角比を求めよう（鈍角の場合）.
（$90^\circ < \theta < 180^\circ$）

(1)　$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$

(2)　$\cos\theta = -\dfrac{3}{5}$

(3)　$\tan\theta = -1$

7. 性質

$90° - \theta$ の三角比

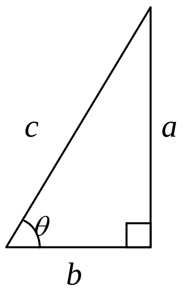


図 7.1　θ の三角比

$$\sin\theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{c} \qquad (7.1)$$

$$\tan\theta = \frac{a}{b}$$

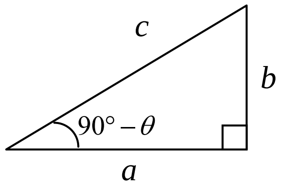


図 7.2　$90° - \theta$ の三角比

$$\sin(90° - \theta) = \frac{b}{c}$$

$$\cos(90° - \theta) = \frac{a}{c} \qquad (7.2)$$

$$\tan(90° - \theta) = \frac{a}{b}$$

2 つの関係から

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta \qquad \cos(90° - \theta) = \sin\theta \qquad \tan(90° - \theta) = \frac{1}{\tan\theta}$$

$180° - \theta$ の三角比を考える

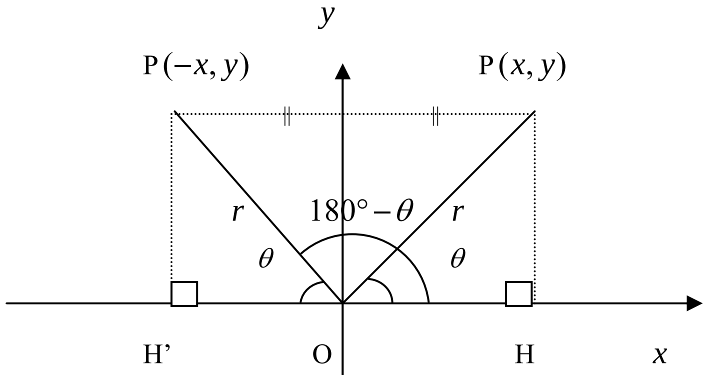


図 7.3　$180° - \theta$ の三角比

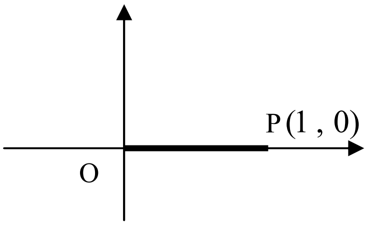
$$\sin(180° - \theta) = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

$$\cos(180° - \theta) = \frac{-x}{r} = -\cos\theta$$

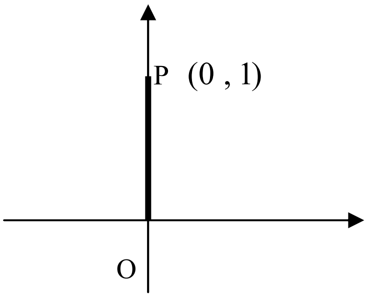
$$\tan(180° - \theta) = \frac{y}{-x} = -\tan\theta$$

8.　0，90，180 の三角比

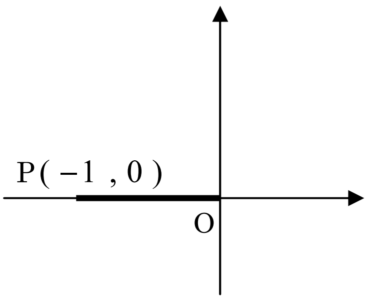
$\theta = 0°$



$\theta = 90°$



$\theta = 180°$



三角比の表を完成してみよう.

表 8.1　0°　～180° の三角比

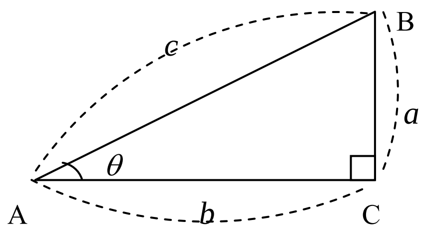
θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\theta$									
$\cos\theta$									
$\tan\theta$									

9. 相互関係

1　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 2　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ 3　$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

(9.1)

証明　三平方の定理から　$a^2+b^2=c^2$



まず三角比の定義から

図 9.1 相互関係

$\sin\theta=\dfrac{a}{c}$　　$\cos\theta=\dfrac{b}{c}$　　$\tan\theta=\dfrac{a}{b}$

1　$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\dfrac{a^2}{c^2}+\dfrac{b^2}{c^2}=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=1$

2　$\tan\theta=\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

3　$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ると

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

10. 三角形の面積

底辺の長さがc，高さがhの三角形の面積は　$S=\dfrac{底辺\times高さ}{2}$ で求められるが

2 辺とその間の角がわかっている三角形の面積を求めてみよう．

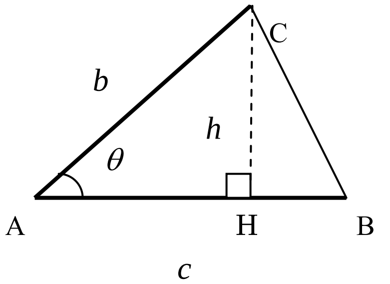


図 10.1　三角形の面積

C から AB に垂線を引く．高さをhとする．（CH＝h）

三角形の面積をSとすると

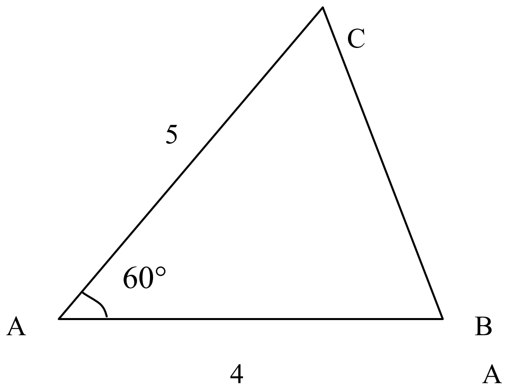
ここで $\sin\theta=\dfrac{h}{b}$ 　　だから　　$h=b\sin\theta$

$$S=\frac{底辺\times高さ}{2}=\frac{bc\sin\theta}{2}=$$

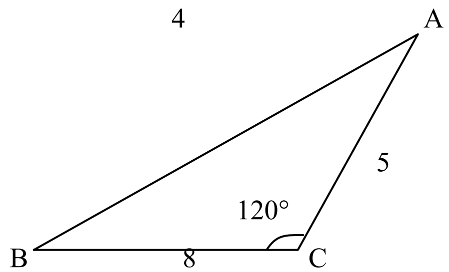
$$\boxed{\begin{aligned} S&=\frac{ab\sin C}{2}\\ S&=\frac{bc\sin A}{2}\\ S&=\frac{ca\sin B}{2}\end{aligned}} \qquad (10.1)$$

練習　次の三角形の面積を求めよ．

(1)



(2)



11. 正弦定理

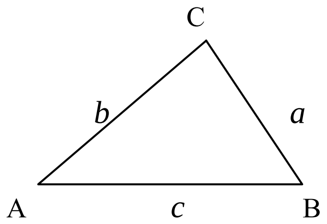


図 11.1　頂点と辺の長さ

三角形の頂点は大文字 A,B,C
辺の長さは小文字　a,b,c を使用
$\mathrm{AB}=c$　$\mathrm{BC}=a$　$\mathrm{CA}=b$

正弦定理の証明

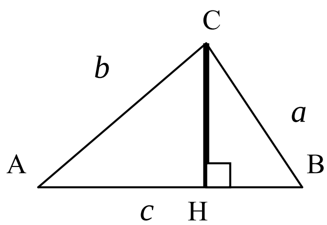


図 11.2　正弦定理

頂点 C から辺 AB に垂線 CH をおろしその長さを x とする.

図から　$\sin A=\dfrac{x}{b}$　①　　　$\sin B=\dfrac{x}{a}$　②

これを $x=$ に変形する.

①から　$x=b\sin A$　　②から　$x=a\sin B$

$b\sin A=a\sin B$

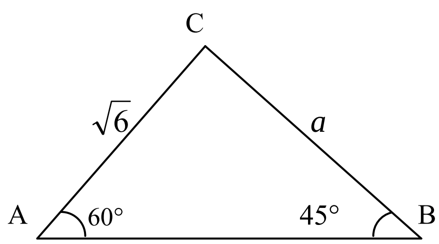
よって　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

同様にして

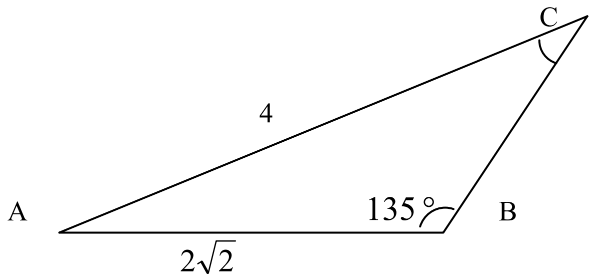
正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \qquad (11.1)$$

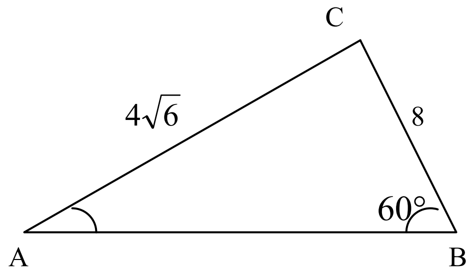
練習 1　右の図で辺 a の長さを求めよ.



練習 2　角 C の大きさを求めよ.



練習 3　角 A の大きさを求めよ.



12. 正弦定理と外接円

外接円との関係

辺 AB が中心 O を通るように移動

外接円の半径 R とする.

BA’=2 R

BC= a

$$\sin A' = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BA'}} = \frac{a}{2R}$$

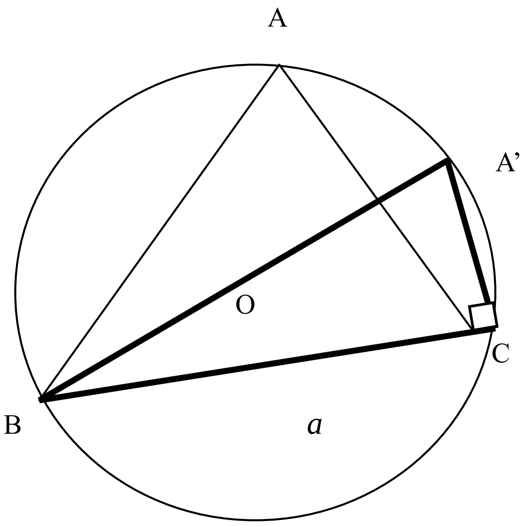


図 12.1　正弦定理と外接円

$\angle A' = \angle A$ より

$\sin A = \dfrac{a}{2R}$　同様にして次の式が得られる

正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \qquad (12.1)$$

△ABC で次のものを求めよ.

練習 1　$\angle A = 45°$　$a = 6$ のとき外接円の半径 R

練習 2　$\angle B = 60°$　$b = 10$ のとき外接円の半径 R

練習 3　$a = 2\sqrt{2}$ 外接円の半径 $R = 2$ のとき角 A

13. 余弦定理 1

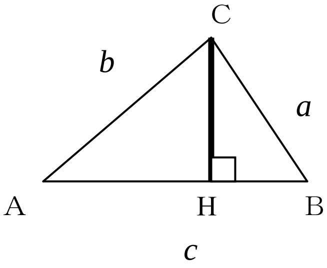


図 13.1 余弦定理

頂点 C から辺 AB に垂線 CH をおろす.

△ACH で　$\sin A = \dfrac{\mathrm{CH}}{b}$　　$\mathrm{CH} = b\sin A$

$\cos A = \dfrac{\mathrm{AH}}{b}$　　$\mathrm{AH} = b\cos A$

また $\mathrm{BH} = c - \mathrm{AH}$

ここで△BCH で三平方の定理から

$$a^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{BH}^2$$
$$= b^2\sin^2 A + (c - b\cos A)^2$$

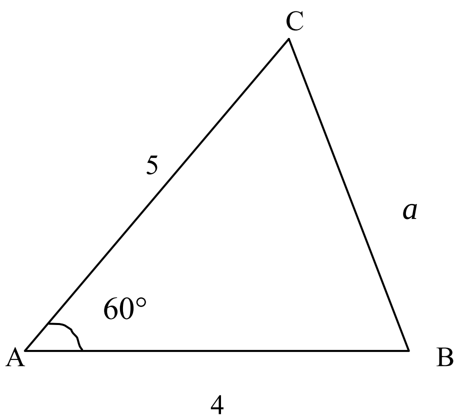
これをまとめて

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

(13.1)

練習 1　辺 a の大きさを求めよ.



14. 余弦定理 2

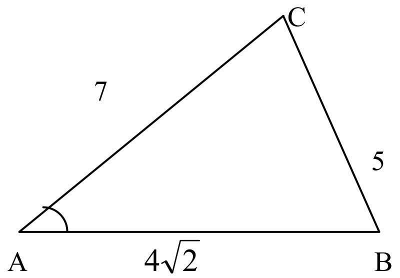
△ABC で三辺の長さがわかったとき角度を求めてみよう.

辺の長さを求めるとき.	角の大きさを求めるとき.
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \rightarrow$	$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \rightarrow$	$\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \rightarrow$	$\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

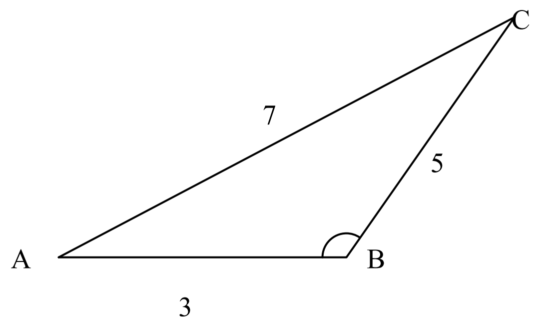
(14.1)

練習 1　角 A を求めてみよう.

$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ より

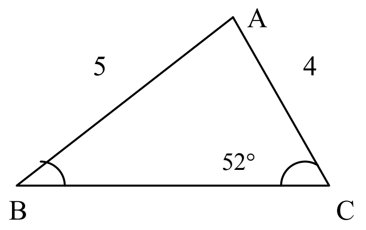


練習 2　角 B の大きさを求めよ.

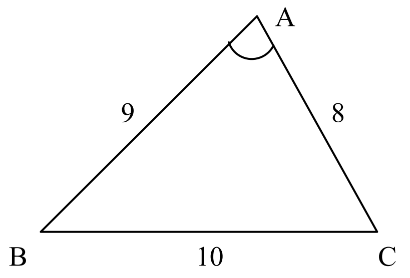


復習

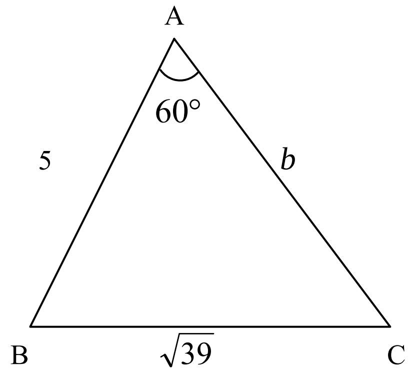
練習 1　角 B の大きさを求めよ．（$\sin 52^\circ = 0.7880$, $\sin 39^\circ = 0.6293$, $\sin 40^\circ = 0.6428$）



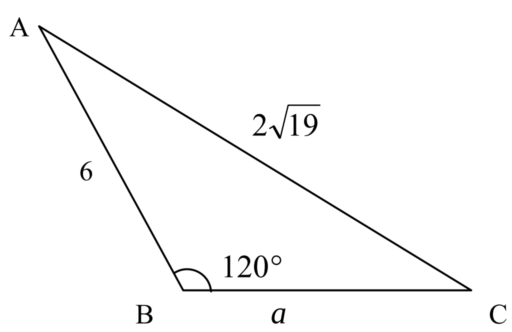
練習 2　角 A の大きさを求めよ．（$\cos 71^\circ = 0.3256$, $\cos 72^\circ = 0.3090$）



練習 3　辺 b の長さを求めよ．



練習 4　辺 a の長さを求めよ



三角関数

1. 一般角

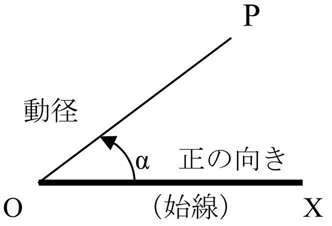
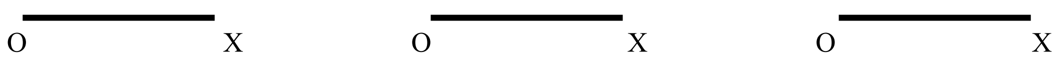


図 1.1　一般角

はじめ OX の位置にあった半直線 OP が O まわりに回転してできた∠XOP において
OX を**始線**,OP を**動径**とよぶ.角の測り方は反時計回りを正の向き,時計回りを**負の向き**とする.
回転した角度$60°$, $-380°$ のようにあらわした角度を**一般角**という.

例 1　次の角を図示しなさい.

（1）　$300°$　　(2)　$-150°$　　(3)　$540°$



動径のあらわす一般角 角α の動径 OP が表す一般角は$\alpha+360°\times n$　ただしnは整数	（1.1）

練習

(1)　$330°$,$750°$,$-330°$,$-1110°$ のうちその動径が$30°$ の動径と同じ位置にある角はどれか.

(2)　$810°$,$990°$,$-630°$,$-810°$ のうちその動径が$90°$ の動径と同じ位置にある角はどれか.

２. 三角関数の定義

三角比を一般角で使えるように拡張してみる.

中心 原点 , 半径 r の円周上の点 $\mathrm{P}(x, y)$ として OP のなす角 θ とする.

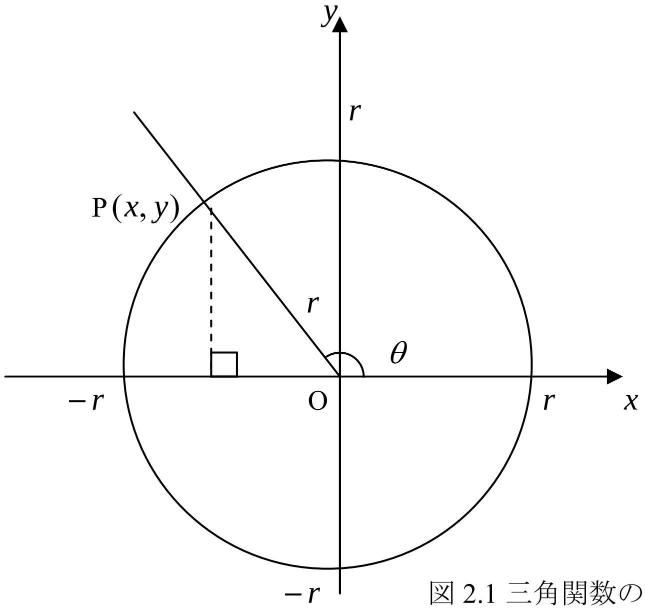


図 2.1 三角関数の定義

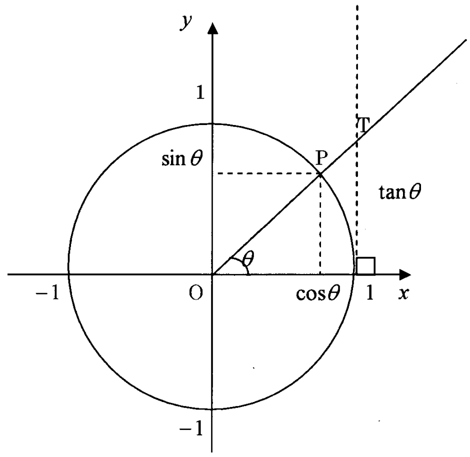


図 2.2　単位円の三角関数

次のように三角比を拡張する.

三角関数の定義
$\sin\theta = \dfrac{y}{r} \quad \cos\theta = \dfrac{x}{r} \quad \tan\theta = \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0)$

$\boxed{\text{半径１の円で考えると}}$

(2.1)　$\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$0° < \theta < 90°$ で使えば従来の三角比と同様である.

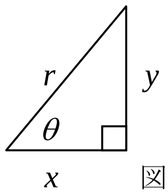


図 2.3　三角比

３. 相互関係

$$\boxed{\begin{aligned} &\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \\ &\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \\ &1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \end{aligned}} \qquad (3.1)$$

定義から　$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$　　$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$　$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

円の方程式から

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

４. 三角関数の性質

$\theta + 360°$

$$\sin(\theta + 360° \times n) = \sin\theta$$
$$\cos(\theta + 360° \times n) = \cos\theta$$
$$\tan(\theta + 360° \times n) = \tan\theta$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots\cdot$$

$-\theta$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

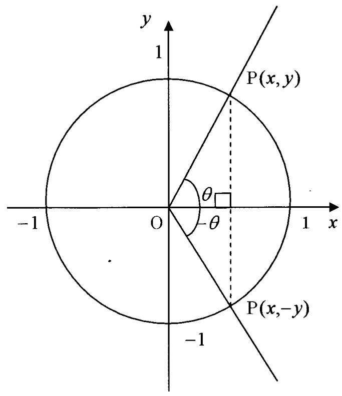


図 4.1　$-\theta$

$180° + \theta$

$$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$$
$$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$$
$$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$$

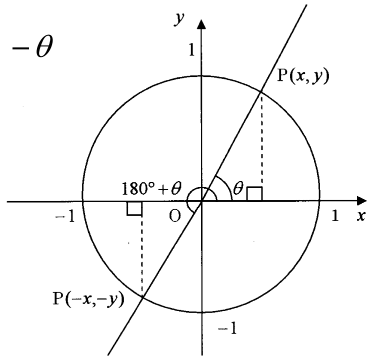


図 4.2　$180° + \theta$

$90° + \theta$

$$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$$
$$\tan(90° + \theta) = -\frac{1}{\tan\theta}$$

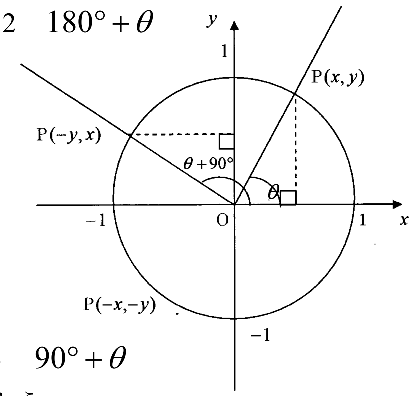


図 4.3　$90° + \theta$

$\sin(180° - \theta)$　$90° - \theta$ の関係も調べてみよう.

練習　次の三角関数の値を求めよ.

（1） $\sin 390°$　　(2)　$\cos(-1140°)$　　(3)　$\tan 945°$

(4)　$\cos 765°$　　（5） $\sin(-810°)$　　(6)　$\tan(-600°)$

５. 加法定理

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{aligned}} \qquad (5.1)$$

証明　次のような図で考える．$\mathrm{OP}=1$ とする．点 P が第１象限にあるときを考えると
$\angle\mathrm{AOH}=\alpha$　　$\angle\mathrm{POH}=\beta$
とする.

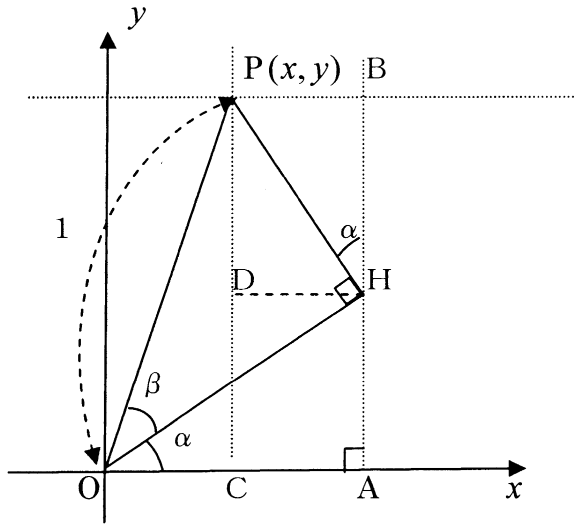


図 5.1　加法定理

点 P の y 座標を考えて

$\mathrm{AB}=\mathrm{AH}+\mathrm{BH}$

$\quad =\mathrm{OH}\sin\alpha+\mathrm{PH}\cos\alpha$

$\quad =\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha$

$\quad =\sin\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ・・・①

$\mathrm{AB}=\sin(\alpha+\beta)$　　　　・・・②

①　②から　　$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

練習１　同様に点 P の x 座標を考えて
OC＝$\cos(\alpha+\beta)$ 、　　OC=OA－HD より
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ を示してみよう.

練習２　次の値を求めよ.

(1)　$\sin 75^\circ$　　(2)　$\cos 75^\circ$　　(3) $\tan 75^\circ$　　(4)　$\sin 105^\circ$

6.2 倍角の公式

$$
\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

証明　加法定理から　$\beta = \alpha$ とおいて公式を証明しよう.

練習 1　$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ を示せ.

練習 2　θ が $0° < \theta < 90°$ で $\cos\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき $\sin 2\theta$, $\tan 2\theta$ を求めよ.

7. 合成

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha) \qquad (7.1)$$

ただし $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

証明

$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$,$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とする.

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \cos\theta\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\theta\cos\alpha + \cos\theta\sin\alpha \right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

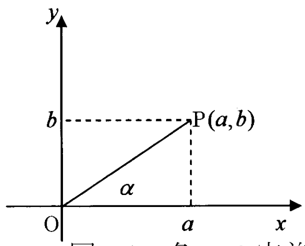


図 7.1　角 α の定義

練習　次の式を合成せよ.

(1)　$\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$

(2)　$\cos\theta - \sin\theta$

8.弧度法

弧度法の定義

円の半径を基準にして角の大きさを表示してみる.

半径 1 の円において弧ＡＢの長さがθのとき∠AOB の大きさをθラジアンと定義する.

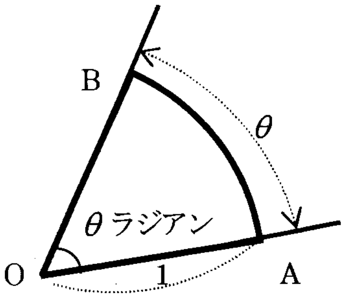


図 8.1　弧の長さ

60 分法　　弧度法

$360° \quad = \quad 2\pi$ （ラジアン）

$1° \quad = \quad \dfrac{\pi}{180}$ (ラジアン)

$\dfrac{180°}{\pi} \quad = \quad 1$ （ラジアン）

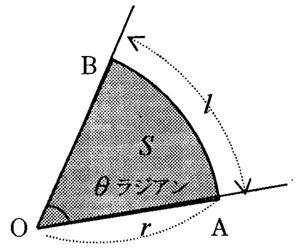


図 8.2　扇形の面積

弧度法によってあらわされた半径r
中心角θの扇形の弧の長さlと面積Sは

$$\boxed{l = r\theta \qquad\qquad S = \frac{1}{2}r^2\theta} \qquad (8.1)$$

練習　次のような扇形の弧の長さと面積を求めよ.

(1)　半径５　中心角　$\dfrac{\pi}{6}$

(2)　半径９　中心角　$\dfrac{4\pi}{3}$

９．三角関数のグラフ

$y = \sin\theta$ のグラフを書いてみよう．

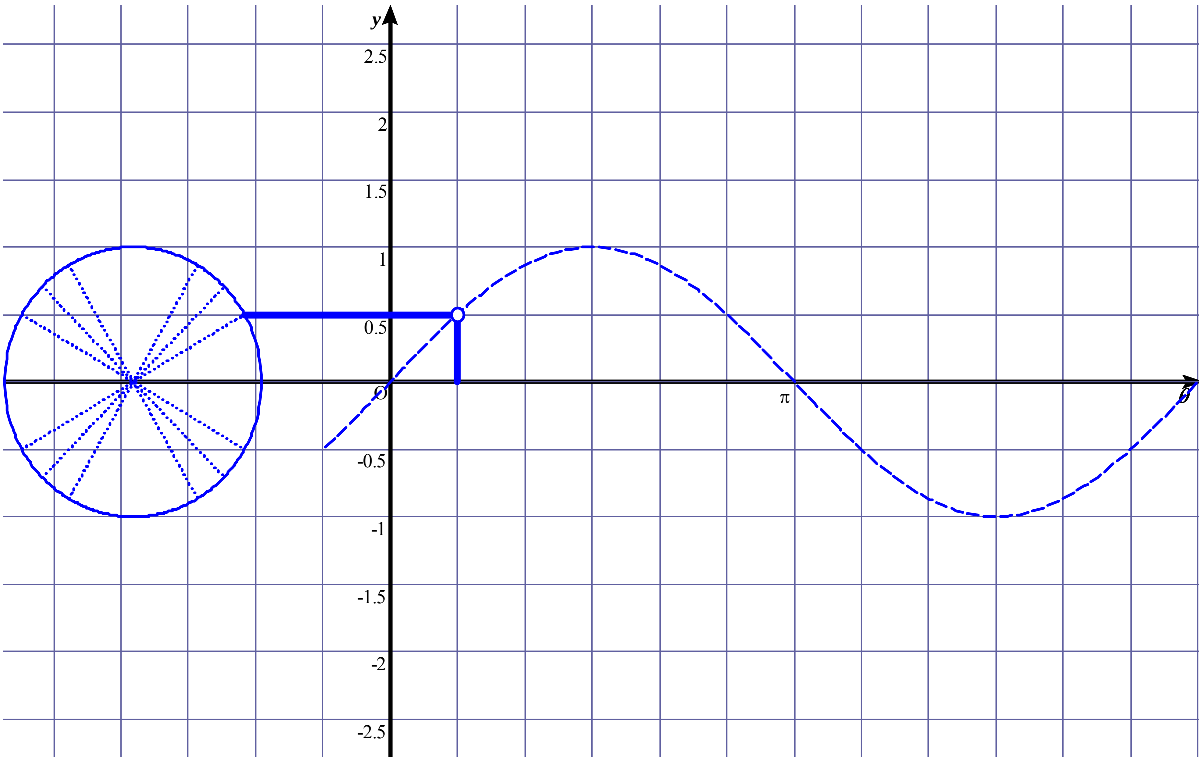


図 9.1　 $y = \sin\theta$ のグラフ

$y = \cos\theta$ のグラフ

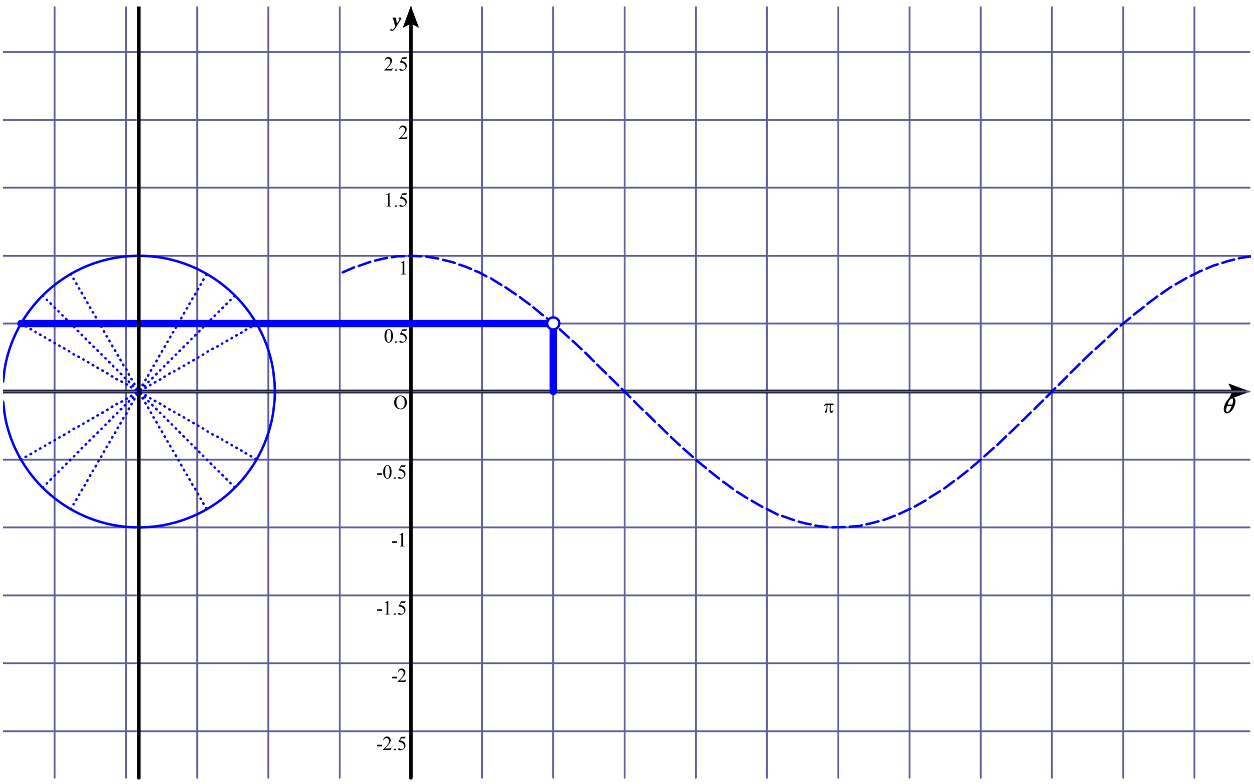


図 9.2　 $y = \cos\theta$ のグラフ

$y = \tan\theta$ のグラフを書いてみよう.

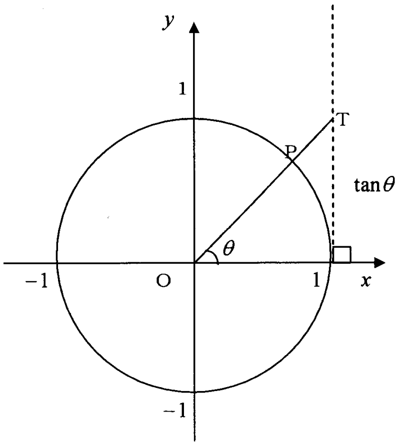


図 9.3　$\tan\theta$ の値

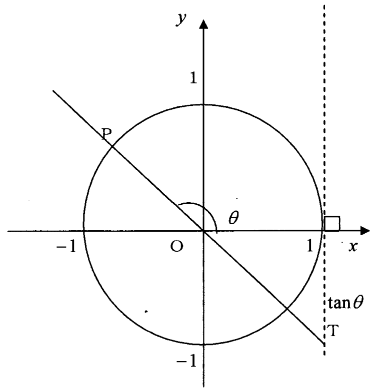


図 9.4　$\tan\theta$ の値

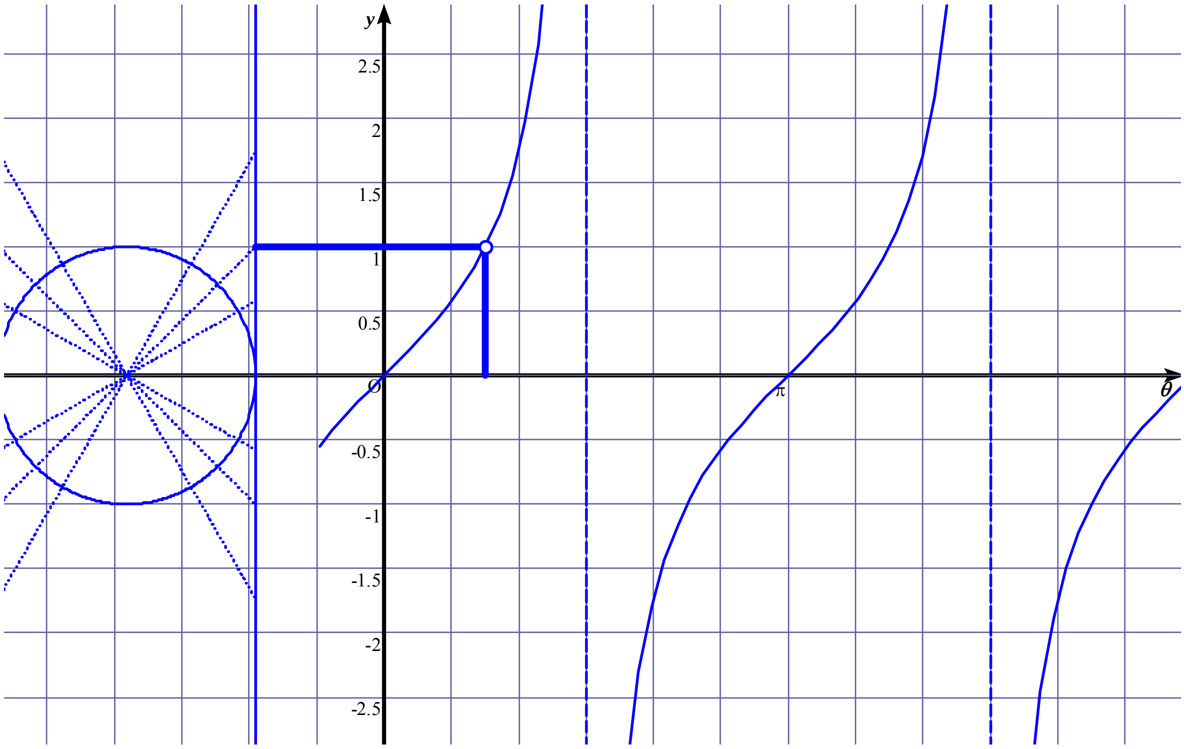


図 9.5　$y = \tan\theta$ のグラフ

例　$y = 2\sin\theta$ のグラフは次のようになる.

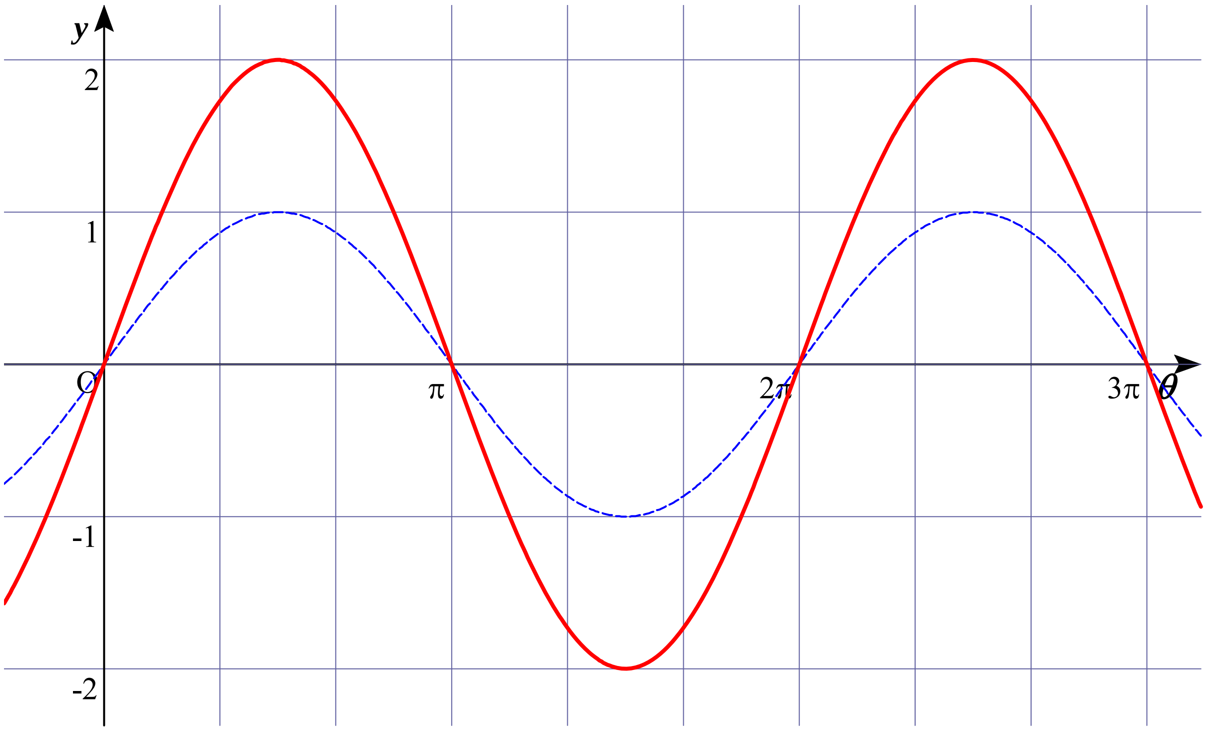


図 9.6　$y = 2\sin\theta$ のグラフ

三角関数のグラフの合成

例　$y = \sin\theta + \cos\theta$ のグラフは次の形になる.

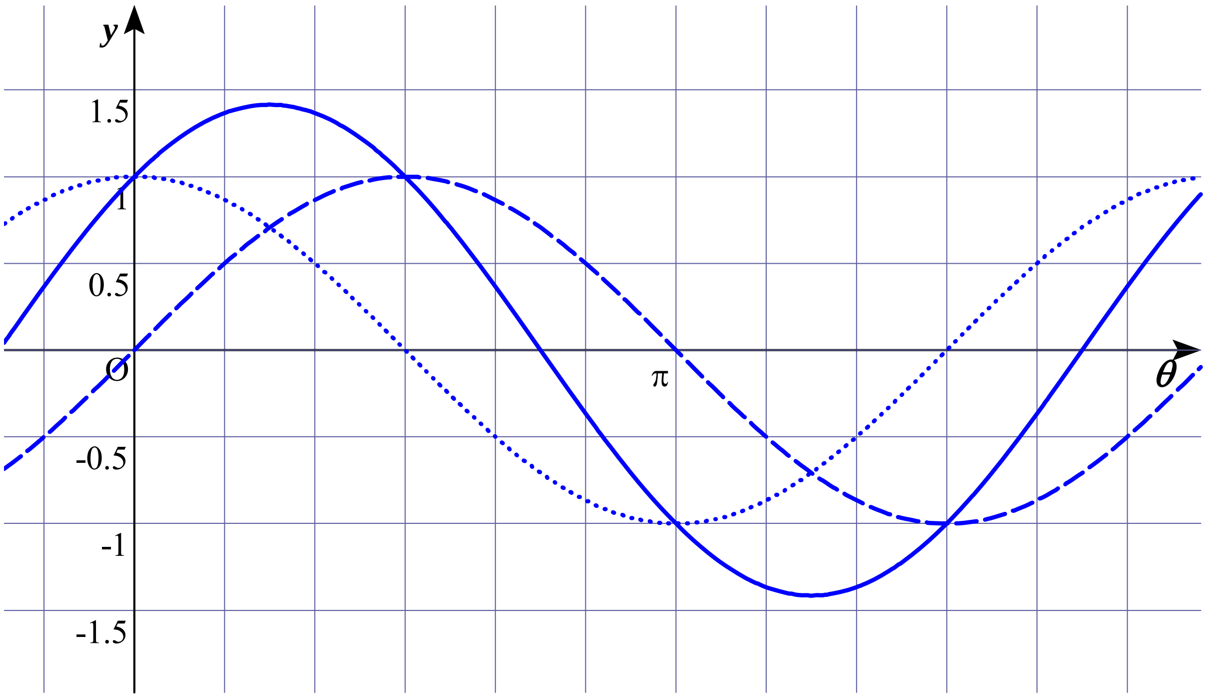


図 9.7　$y = \sin\theta + \cos\theta$ のグラフ

10.三角関数の応用例として

○ 単振動　　錘をつけたばねの往復運動等は

$x = A\sin(\omega t + \varphi)$　でありわされる

x 位置　A 振幅　ω 角振動数　φ 初期位相　t 時刻

$\dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} = T$　（周期）　k バネ定数　m 錘の質量

$\dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = f$　（振動数）

（$x'' = -\omega^2 x$ の 1 つの解です．ただし,x' は x を t で微分した量）

証明　$x = A\sin(\omega t + \varphi)$ とすれば　$x' = \omega A\cos(\omega t + \varphi)$

$x'' = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi)$　$\therefore\ x'' = -\omega^2 x$

○ 音（波形）の合成

音声は合成波形の 1 つです.音声がどんな波形から構成されているか分析するのがフーリエ変換です．フーリエ級数のある極限を取るとフーリエ変換が得られます.

○ フーリエ級数

区間 $[-\pi, \pi]$　で定義された関数を　sin，cos で展開したものです.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

参考文献

[1]　岡本和夫 他　新高等学校　数学 I　実教出版（2006 年）
[2]　飯高 茂 他　新編数学 II　東京書籍　(2004 年)

※　三角関数のグラフは　GRAPES6.50C を利用して作図