指数関数や三角関数と音階（純正率や平均率）について

石川県立鹿西高等学校
河野　信子

ねらい

私の趣味の一つは合唱ですが、合唱をしていると、倍音が聞こえますか？と聞かれました。初めは何のことなのだろうか、どんな音なのだろうかわかりませんでした。ところが、ある日、突然かすかに優しい響きの倍音が、聞こえました。倍音とは、一般的に男性で１オクターブ離れた音（たとえばドと１オクターブ高いド、振動数が２倍になる）を、テノールとバスが歌ったとき聞こえてくる、ソの音を言います。一度聞こえると、その音はたやすく、聞き取れるようになります。その結果、自然界の音、テレビやラジオの音、生の合唱、オーケストラ、お経を聞くとき、生徒達がブラスバンドで低音楽器の練習をしているとき、鐘の音を聞くときなど、癒しの音である倍音がよく鳴っていることに気づきます。最近は、その響きに魅せられ、ますます音楽を楽しみ、倍音を聴いて癒されるようになりました。

耳でやっと聞こえるような倍音を聞くことは、絵画で見えないものを見ることにも繋がります。ささやかな小さいもの（例えば星やホタル）が、あるときは、大きな目立つものより美しいときもあるのではないかと考えてみることにも繋がります。目にみえない短歌や俳句の余韻にも繋がり、人生が楽しくなると思います。絵画や、短歌や俳句の余韻は公式に出来ませんが、倍音の仕組みは公式で簡単に解明出来るのです。

概要は３章に倍音と指数関数や三角関数の関係をまとめてあるが、

１，倍音や音階（純正率、平均率）についての考察

三角関数の和を積になおす公式

$$\sin\theta + \sin 2\theta = 2\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$$

この簡単な公式の中にドと１オクターブ高いドを同時に歌うと（鳴らすと)、ソが聞こえる仕組みが隠されている。

２，ピアノなどは、音階が平均率でつくってあり、平均率の振動数　$440\times 2^{\frac{x}{12}}$

は高校で習う指数関数である。平均率の音階の振動数を計算する。

３，三角関数の和を積になおす公式

$$\sin\theta + \sin\frac{3}{2}\theta = 2\sin\frac{5}{4}\theta\cos\frac{1}{4}\theta$$

この公式の中に、ドとソを同時に歌うと（鳴らすと)、ミが聞こえる仕組みが隠されている。

目次

１章　倍音は聞こえますか？

合唱する場合では、倍音とは、一般的に１オクターブ離れた音（たとえばドと１オクターブ高いド、振動数が２倍になる）を、テノールとバスが歌ったときなどに聞こえてくる、ソの音を言います。

その音を私の場合は聞こえるまで、何年もかかりました。あるとき突然ソの音が聞こえ始めました。時にはミも聞こえました。一度聞こえると、もうしめたものです。

葬式等で読経を聞くとき、ピアノの１オクターブをゆっくり弾くとき、ギターのチューニングの時、オーケストラの演奏の最後の時、ブラスバンドの低音楽器の音階練習の時など、よく聞こえるようになります。日常生活で倍音を好んで探して、聴くようになります。

音楽は得意なアマチュアの指揮者に聞くと、壁にあたって反射した音でないですか？とか、音の響きに反応して、壁や、家具が自ら振るえだし、音を発するのでないですか？と答えてくれました。それは科学的ではないことが、高校２年くらいの数学でわかります。

耳の発達した音楽の先生に、ドの音に対して、倍音として、ソの音やミの音が聞こえるのですが、他にも聞こえますかと尋ねました。その先生は、全部の音階が倍音で聞こえるとおっしゃり、いたるところで倍音は鳴っていて、気付かなかっただけと分かりました。

また、純正率で作った音楽を、認知症があり他動の老人に聞かせると心が落ち着き、じっとしていられると書いてある本（音楽革命論、玉木弘樹著、出版芸術社）を見つけ、純正率のすごい力の仕組みの解明を自己流で始めました。純正率で作った音楽のＣＤもたくさん発売されていることがわかり、買って聞いてみました。なるほど、心が落ち着く感じがし、心と頭の奥深くに音が浸透していく感じが、体と脳に効くと思いました。今は毎日、聞き続けて自分の体と脳の変化を調べている途中です。

その倍音が何故鳴るのか？簡単な三角関数の和のグラフを、GRAPESやマセマティカに書かせてみると、理解しやすくなり、簡単な原理であることに驚きました。

２章　倍音や音階についての基礎４点。（１から順に進むほど知っている人は少なくなります

が）

１，音は目に見えないが、音は波である。

２，ドレミファソラシドのラの音（音叉の音）の振動数は440回／秒。

３，１オクターブ高い音は振動数が倍になっている。

４，１オクターブ低めの音を同時に鳴らすと、その音と違う音が聞こえることがある。

２－１については、説明を省きます。

２－２，ドレミファのラ音（基本の音叉の音）振動数は440回。

２，について　特に振動数と波長と体の長さについての考察。

ドレミファのラ音（基本の音叉の音）振動数は440回。音速は毎秒約340ｍ。よって波長は340ｍ÷440≒0.773ｍ（約身長の半分。つまり身長の中で2周期の波が起こっている感じ）。それで、人間の音声に近いオーボエとか、チェロは人間の身体の半分位の長さなのかと納得できます。

１オクターブ高いラの音の振動数はその２倍の880回（波長は身長の約の４分の1）（人間のソプラノの人はほとんどその高さの音は出せます）。フルートの長さは人間の身体の４分の1位の長さなのかと納得できます。

また更に１オクターブ高いラの音の振動数はその２倍の1760回。（波長は身長の約８分の1、膝くらいの長さ、）さらにその上は3520回、7040回。（手くらいの長さの波長。ピアノでは音は出ます。人間の声では出すことは無理。）

波の振動を私は体に感じませんが、耳のある神経は振動を感じているのですね。体の中を音の波が駆け抜けていることを、感じてみるのも楽しいですね。

２－３，１オクターブ高い音は振動数が倍になっている。

３，について　ラの音の１オクターブごとの振動数は

$440 \times 2^{x-1}$　　指数関数となる。

木琴や鉄琴の長さは１オクターブ高くなると、半分になっています。波長は半分になることより、倍の振動数の音を発することができます。それで、木琴や鉄琴の共鳴棒の長さは指数関数のグラフを描いています。グランドピアノの形は、一部分は、指数関数のグラフのようになっています。

波長や振動にすると、人間はどれくらいまで聞こえるかと、インターネットで調べてみました。波長が２ｃｍから1.7ｍの波は聞き取れることが分かりました。

> 出典：フリー百科事典『ウィキペディア』
>
> 超音波（ちょうおんぱ）とは、人間の耳には聞こえない高い振動数をもつ弾性振動波のこと。狭義には周波数が16㎑以上の音波を言い、広義には人間が聞くことを目的としない音波のことを言う。（ヒトが音を音として感じることができるのは20㎐～20㎑程度と言われており、この周波数帯域を可聴域という。）

では高い音の17㎑の超音波の波長はどれくらいかと計算してみました。

340ｍ÷17000＝34000 ｃｍ÷17000＝2 ｃｍ

体の検査のため、病院で超音波を当てられるとき、体のなかに２ｃｍ以下の波が作られていて反射の具合で病気がわかると考えることにします。この波も体で感じられると楽しいでしょう。

では20㎐ の低音が体の響くとき、

340ｍ÷20＝1.7ｍ

だいたい人の身長くらいの波が体を通るのですから体に響くという表現に納得できます。太鼓の低音ならお腹に響くことはありますね。

２－４、１オクターブの低めの音を同時に鳴らすと、その音と違う音が聞こえる。ピタゴラスが発見したとも言われています。

いよいよ本題の倍音の仕組みです。ドに対して倍音ソは何故鳴るのか？を考えました。方程式の解を求めても解決しますが、グラフを書くことが得意のソフト「GRAPES」や「スタディエイド」「マセマティカ」でグラフを書かせると、簡単に解決します。次ページでグラフを表示してあります。

波を合成（和）すると、波長に小さな波が見えてきます。この小さな波がソとなるのです。つまり周期2πのグラフと周期πのグラフを加えると周期が$\dfrac{2}{3}\pi$の波のグラフが作られています。

３章　倍音や音階（純正率、平均率）についての理論　（２章の４の説明）

１，ドと１オクターブ高いドを同時に歌うと（鳴らすと)、ソが聞こえる仕組み

２，平均率について

３，ドの音と、ソの音を同時に鳴らすと、ミが鳴る仕組み

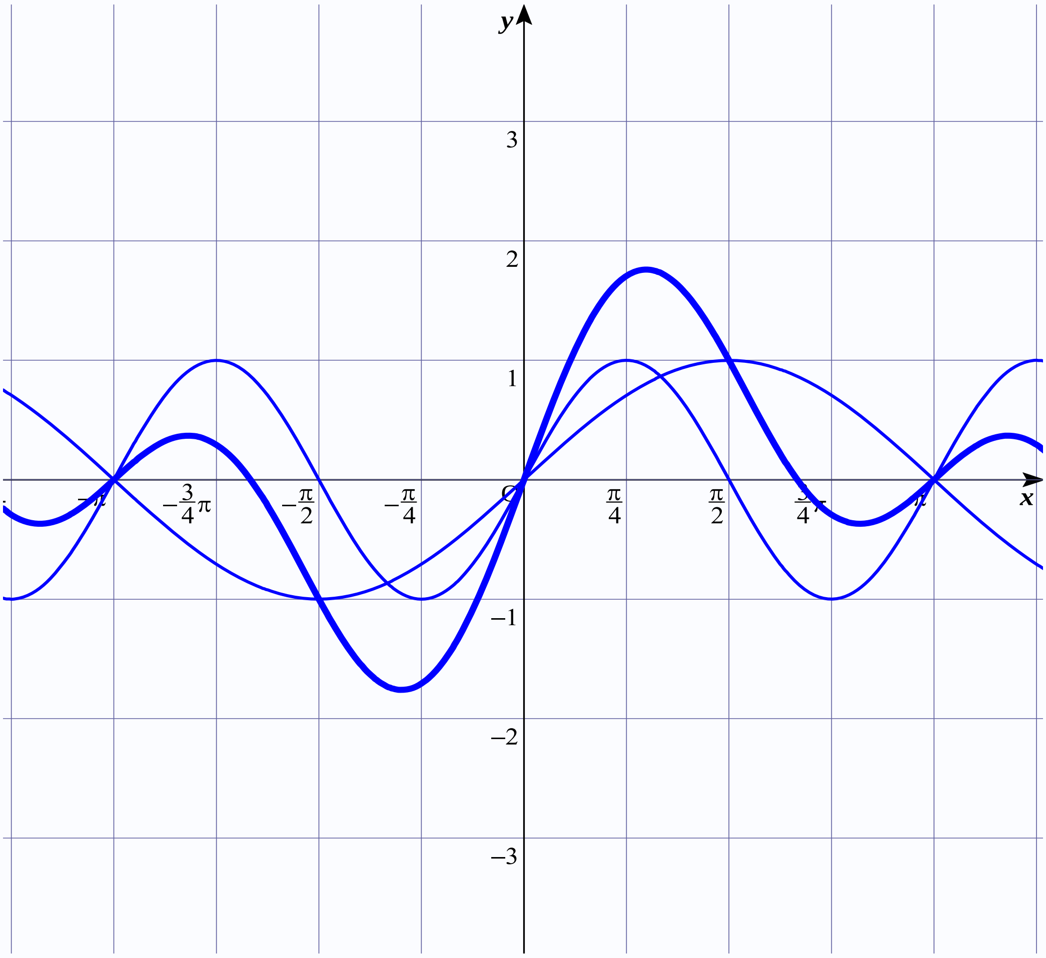
１，について

三角関数の和を積になおす公式

$$\sin\theta+\sin 2\theta=2\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$$

$\sin\theta+\sin 2\theta=2\sin\dfrac{3}{2}\theta\cos\dfrac{1}{2}\theta=0$ の解は　$\theta=(2n-1)\pi,$ を中心に$\pm\dfrac{1}{3}\pi$となる解がある。

この簡単な公式の中にドと１オクターブ高いドを同時に歌うと（鳴らすと）、ソが聞こえる仕組みが隠されている。



グラフ１，（GRAPES で作成）

その証明　$\sin\theta + \sin 2\theta = 2\sin\frac{3}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta = 0$　とおき

解 θ を解く、$\sin\frac{3}{2}\theta = 0, \cos\frac{1}{2}\theta = 0$

前式より $\theta = \frac{2}{3}n\pi,$ つまり $\theta = \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{6}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \frac{10}{3}$ ・・・

後式より $\theta = (2n-1)\pi,$ つまり $\theta = \pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi$ ・・・・

この２つの解より　$\theta = (2n-1)\pi,$ を中心に $\pm\frac{1}{3}\pi$ となる解があり

この波がドに対して、１オクターブ高いソ（ドに対して５度高い音、純正率のソともいう）を作り出しています。

Ａがスタートの５度ごとの音階（ラがスタートの音階）の振動数を考えます。

ではラに対して５度高い音はミ、その波の周期は$\frac{2}{3}\pi$、よって振動数は逆数で

$$440\times 2\times \frac{3}{2}=1320$$

　１オクターブ低いミの振動数は半分にして　660 となったわけです。その１オクターブ低い、普通のミの振動数は330と決まりました。

　同じ理論でミと１オクターブ高いミの音を鳴らすとシの音が響きます。シの振動数はミの1.5倍、つまり

$330\times \frac{3}{2}=495$になります。

シ対して５度高い音は、ファ＃　この振動数は

$495\times \frac{3}{2}=742.5$　　ドからドの音内に納めるなら、

その半分で371.25　　同じ事を繰り返すと、どんどん音階ができます。まとめると

ラの振動数$440\times n$

ミの振動数$330\times n=440\times \frac{3}{2}n$

シの振動数$495\times n=440\times \left(\frac{3}{2}\right)^2 n$

ファ＃の振動数$371.25\times n=440\times \left(\frac{3}{2}\right)^3 n$

ド＃の振動数は$278.44\times n=440\times \left(\frac{3}{2}\right)^3 n$

この計算はエクセルで簡単に計算できます。$\frac{3}{2}$の累乗の指数関数で音階ができます。

この音階での振動数は、全部有理数です。左の数を1.5倍、上の数を半分にした表１

ラ	ミ	シ	ファ#	ド#	ソ#	レ#	ラ#	ファ	ド	ソ	レ	ラ
440	660	990	1485	2228	3341	5012	7518	11277	16915	25373	38059	57088
220	330	495	742.5	1114	1671	2506	3759	5638	8458	12686	19029	28544
110	165	247.5	371.3	556.9	835.3	1253	1879	2819	4229	6343	9515	14272
55	82.5	123.8	185.6	278.4	417.7	626.5	939.7	1410	2114	3172	4757	7136
27.5	41.25	61.88	92.81	139.2	208.8	313.2	469.9	704.8	1057	1586	2379	3568
13.75	20.63	30.94	46.41	69.61	104.4	156.6	234.9	352.4	528.6	792.9	1189	1784
6.875	10.31	15.47	23.2	34.8	52.21	78.31	117.5	176.2	264.3	396.4	594.7	892
3.438	5.156	7.734	11.6	17.4	26.1	39.16	58.73	88.1	132.1	198.2	297.3	446

表１（エクセルで作成）

同じ計算を繰り返すと表１より、ラの音に戻ったとき振動数の結果は次のようになります。

$446.003 - 440 \fallingdotseq 6$ のずれが生じてきます。

それで音階というものは、少々アバウトであるのだと分かりました。歌を歌うとき、音痴は許されるものであるようです。

この振動数は440をスタートとしていますが、スタートの振動数はなにでもいいわけで、スタートの振動数によって、無数の音階（ドレミファソラシド）ができるわけです。

２，平均率について

音階には平均率という音階があります。ピアノ等に採用されています。平均率はラの440から次のラの880までを均等に指数を12等分したものです。この音階では、神様や天使の音は出にくくなります。振動数は

$$440 \times 2^{\frac{x}{12}}$$

この関数も指数関数です。この式では、最初のラは440、１オクターブ高いラは880になります。この音階は最初と最後のラ以外は無理数です。

前の有理数から作った音階と振動数にずれが生じています。オーケストラがピアノ協奏曲を演奏するのを嫌う場合があるというのも肯けます。

平均率の振動数　　$440 \times 2^{\frac{x}{12}}$

ラ	ラ#	シ	ド	ド#	レ	レ#	ミ	ファ	ファ#	ソ	ソ#	ラ
440	466.2	493.9	523.3	554.4	587.3	622.3	659.3	698.5	740	784	830.6	880

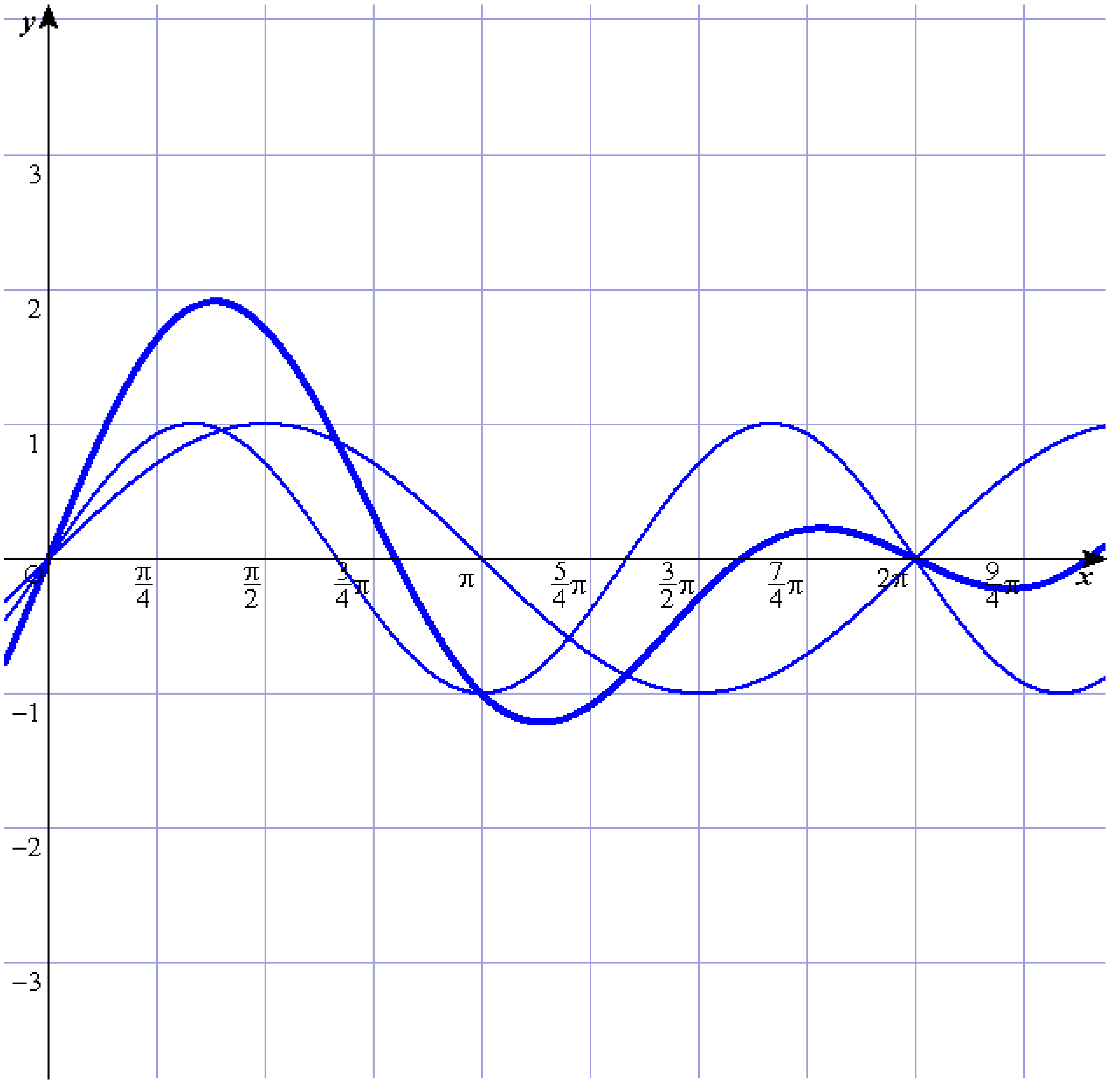
表２（エクセルで作成）

３，について

ドの音と、ソの音を同時に鳴らすと、ミが鳴ります。この秘密は次の式にあります。

$$\sin\theta + \sin\frac{3}{2}\theta = 2\sin\frac{5}{4}\theta\cos\frac{1}{4}\theta = 0$$ とおく。

前回と同じ理論より$(2+4n)\pi$の前後に$\pm\frac{2}{5}\pi$の解があります。それがドに対してはミまたラに対してはド＃の音が聞こえることになります。



グラフ２　（GRAPES で作成）

ではド＃の振動数は　$440\times\frac{5}{4}=550$

前回の純正率ド＃556.88とは6.88低くなり、ずれがあります。また平均率のド＃554.4とは4.4のずれが生じます。よくハモリをよくするためには真ん中の3度は低く歌ったり、鳴らしたりした方がいいといわれることが納得できます。ピアノは平均率で調律してあるので、音程を変えることはできませんが、訓練されている声や、バイオリン等の弦楽器、トロンボーンなどは微妙に音程を変えることができます。より、自然の響きに近い音、うなりのないハモリのいい心地よい音を楽しめると思います。

自然なミに関しても、1オクターブの和音を出したときに聞こえる3度の音（前に作った）と、5度の和音を出した3度の音程（後に作った）が違うので、ミの音にもいろいろあることがわかります。

自然の和音や音のなかではその違いを聞き分けることは耳の発達した人以外はなかなかできないですが、ハーモニィディレクターというキーボードで和音を出して、比べてみると、普通の人でも、その微妙な違いがわかります。音程や和音は自然と人工の中で、動き回っているのです。

低い音を１つしか鳴らさないときにも、倍音が聞こえることはあります。その音と共鳴した音と、その音自身との、倍音だと思います。

５度の和音から出る真ん中の３度高い音つまり振動数1.25倍の音から、どんな振動数と音階ができるか調べました。３度ごとの音階の振動数　左の数を1.25倍して上を半分にした表

ラ	ド＃	ファ	ラ
440	550	687.5	859.375
			429.6875

表３（エクセル）

１オクターブ高いラの音とは平均率に比べると、ずいぶん低くなります。

音階には、その時々のアバウトさと厳格さの中を動き回っているようです。合唱でソプラノが同じ音を保って出すように、楽譜に指示されていても、他の人パートが音を変えてくると、その音に合わせて音を微妙に変える方が、ハモリはよくなるとわかりました。

ドに対する、ミの音に関しても、ミの音にもいろいろあることがわかります。たくさんの音程があるので、音痴も許されます。和音のなかで、その違いを聞き分けることは耳の発達した人がたまにいます。オーケストラなどを聴く機会を増やすとなるようです。

純正律が１５世紀後半に比を一番単純で、自然に近いものとして完成

純正律の長音階における、主音に対する周波数比（上段）

隣り合う2音の周波数比（下段）　　　　5リミットの音律ともいう

C	D	E	F	G	A	B	C
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2
	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

表４

４章　まとめ

一部の先生方は、倍音について知らなかったとか、おもしろいとか言われたのでよかったと思っています。自然科学と芸術とが結びあっていることがおもしろいと思います。

高校生には、受験には関係ないので、数学Ⅲ選択の生徒に「GRAPES」で色々なグラフを書かせたときに、$\sin\theta + \sin 2\theta$ のグラフを書かせて説明した。一部の興味のある生徒は驚いていました。自然現象が簡単な数学公式で解明できることが他にないか、さらに考察していきたい。

参考文献　「音階の不思議」