

指数関数や三角関数と音階（純正率や平均率）について

石川県立鹿西高等学校

河野 信子

ねらい

私の趣味の一つは合唱ですが、合唱をしていると、倍音が聞こえますか？と聞かれました。初めは何のことなのだろうか、どんな音なのだろうかわかりませんでした。ところが、ある日、突然かすかに優しい響きの倍音が、聞こえました。倍音とは、一般的に男性で1オクターブ離れた音（たとえばドと1オクターブ高いド、振動数が2倍になる）を、テノールとバスが歌ったとき聞こえてくる、ソの音を言います。一度聞こえると、その音はたやすく、聞き取れるようになります。その結果、自然界の音、テレビやラジオの音、生の合唱、オーケストラ、お経を聞くとき、生徒達がブラスバンドで低音楽器の練習をしているとき、鐘の音を聞くときなど、癒しの音である倍音がよく鳴っていることに気づきます。最近、その響きに魅せられ、ますます音楽を楽しみ、倍音を聴いて癒されるようになりました。

耳でやっとな聞こえるような倍音を聞くことは、絵画で見えないものを見ることにも繋がります。ささやかな小さいもの（例えば星やホタル）が、あるときは、大きな目立つものより美しいときもあるのではないかと考えてみることに繋がります。目にみえない短歌や俳句の余韻にも繋がりが、人生が楽しくなると思います。絵画や、短歌や俳句の余韻は公式に出来ませんが、倍音の仕組みは公式で簡単に解明出来るのです。

概要は3章に倍音と指数関数や三角関数の関係をまとめてあるが、

1, 倍音や音階（純正率、平均率）についての考察

三角関数の和を積になおす公式

$$\sin \theta + \sin 2\theta = 2 \sin \frac{3}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta$$

この簡単な公式の中にドと1オクターブ高いドを同時に歌うと（鳴らすと）、ソが聞こえる仕組みが隠されている。

2, ピアノなどは、音階が平均率でつくってあり、平均率の振動数 $440 \times 2^{\frac{x}{12}}$

は高校で習う指数関数である。平均率の音階の振動数を計算する。

3, 三角関数の和を積になおす公式

$$\sin \theta + \sin \frac{3}{2}\theta = 2 \sin \frac{5}{4}\theta \cos \frac{1}{4}\theta$$

この公式の中に、ドとソを同時に歌うと（鳴らすと）、ミが聞こえる仕組みが隠されている。

目次

- 1章 倍音は聞こえますか？
- 2章 倍音や音階についての基礎4点。
 - 1, 音は目に見えないが、音は波である。
 - 2, ドレミファソラシドのラの音（音叉の音）の振動数は440回／秒。
 - 3, 1オクターブ高い音は振動数が倍になっている。
 - 4, 1オクターブ低めの音を同時に鳴らすと、その音と違う音が聞こえることがある。
- 3章 倍音や音階（純正率、平均率）についての理論（2章の4の説明）
 - 1, ドと1オクターブ高いドを同時に歌うと（鳴らすと）、ソが聞こえる仕組み
 - 2, 平均率について
 - 3, ドの音と、ソの音を同時に鳴らすと、ミが鳴る仕組み
- 4章 まとめ