地図における数学

金沢大学教育学部附属高等学校
川谷内 哲二

ねらい

数学がいろいろな場面に利用されているが，そのことが表には現れにくい。そこで，身近な地図を題材とし，地図がどのようにして作られているのか，その特徴は何かを学びながら，その中に使われている数学を知り，数学の学力をつけていただきたい。

また，高等学校の学習領域の中で，個人差はあるものの，苦手とする領域として図形領域，特に空間図形の領域が挙げられる。空間感覚の育成は簡単ではないが，立体図形としての地球から平面図形としての地図に構成していく過程を考えることにより，空間感覚も養われることが期待される。

地図の中に込められた先人達の知恵を学びながら，数学を深めていってもらいたい。

目次

１．地図投影法

地図を作成するためには，地球面上の各点を平面上に対応させて描く方法を考えなければならない。どんな方法をとっても広い範囲にわたって球面上の位置関係を変えず同じ状態で平面上に対応させることは不可能である。そこで，ある点を犠牲にして，ある点において正しく描かれることを目的にする。

それは，使用目的によって決定されることになるが，主な条件は次の 3 つである。

① 正距図法 … 距離関係を正しく写す

② 等角図法 … 角または方位を正しく写す

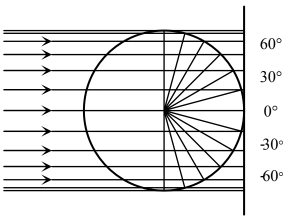
③ 正積図法 … 面積関係を正しく写す

地図投影法には，地球を直接投影する**投射図法**，円錐面上に投影してそれを平面上に展開する**円錐図法**，また円柱に投影する**円柱図法**などがある。

(1) 投射図法

一定な点（視点）から，地球をその接平面に投影する方法

(a) **正射図法** … 視点を無限遠点において，地球を平面上に投影する方法



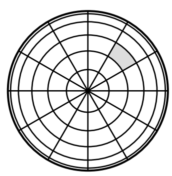


図 1.1 正射図法 (1)

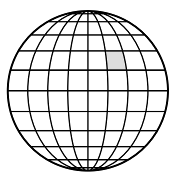
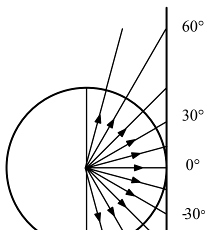


図 1.2 正射図法(2)

(b) **心射図法** … 視点を地球の中心に置いたもの



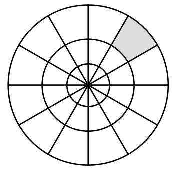


図 1.3 心射図法 (1)

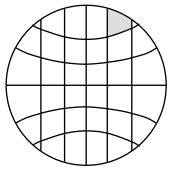
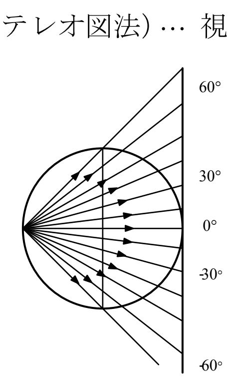


図 1.4 心射図法(2)

(c) **平射図法**（ステレオ図法）… 視点を中心に関して接点と対称な点に置いたもの



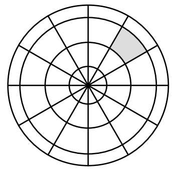


図 1.5 平射図法 (1)

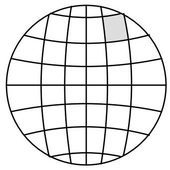


図 1.6 平射図法(2)

(2) 座標による投影

(d)　ここで，座標を利用して，経線や緯線がどのように移されるかについて考えてみよう。

地球を球面 T:$x^2+y^2+(z-1)^2=1$，投影する平面を xy 平面とみて計算してみよう。

(ｉ)　南極点 S が接点（原点 O）にある場合は，経線と緯線は，上の図 1.1，図 1.3，図 1.5 のように，同心円と中心を通る線分に移される。

(ⅱ)　経度 0°，緯度 0°の地点が接点（原点 O）にある場合で，赤道が yz 平面上にある場合，

緯線は，球面 T と平面 $x=t$（$-1<t<1$）との交円として表される。その方程式は，

$x=t$ を $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ に代入して，

$$y^2+(z-1)^2=1-t^2,\ x=t\ (-1<t<1)$$

経線は，球面 T と点$(0,0,1)$を通り，法線ベクトル$(0,\cos\theta,\sin\theta)$の平面 $y\cos\theta+z\sin\theta=\sin\theta$ との交線の大円[※1]として表される。

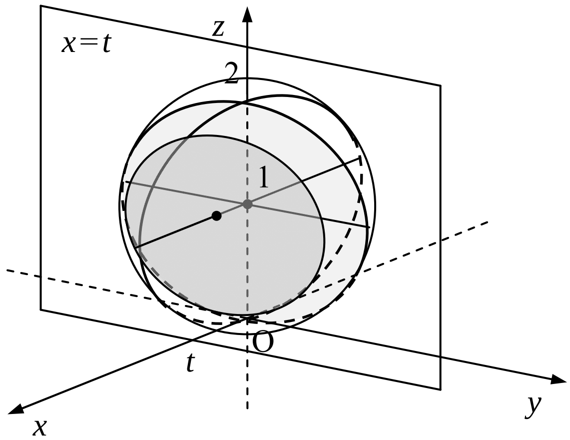


図 1.7　同一の緯線を含む面が yz 平面に平行

(e)　正射図法の場合

z 軸の平行に投影すると，緯線は円 $y^2+(z-1)^2=1-t^2$，$x=t$（$-1\le t\le 1$）で表わされるから，半径が $\sqrt{1-t^2}$ より長さ $2\sqrt{1-t^2}$ の線分になる。

経線は，平面 $y\cos\theta+z\sin\theta=\sin\theta$ 上の円が，xy 平面に投影されるから，楕円ができる。2 平面のなす角が $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ だから，一定の方向（2 平面の交線に垂直な方向）に $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$ 倍されるから，長軸の長さ 2，短軸の長さ $2\sin\theta$ の楕円に移される。よって，図 1.2 における曲線は楕円である。

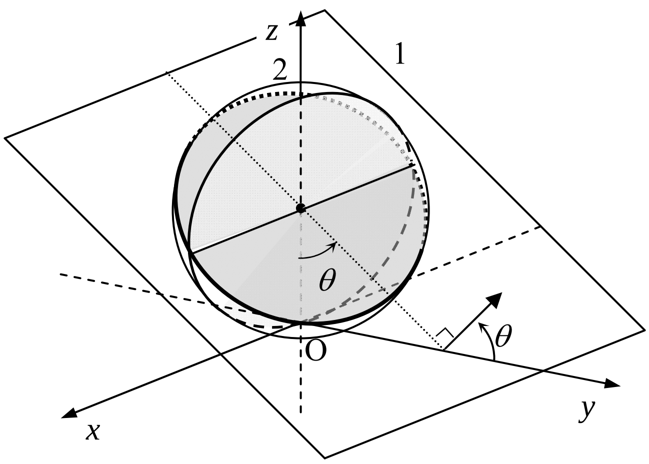


図 1.8　同一の経線を含む面が x 軸に平行

(f)　心射図法の場合

球の中心 C$(0,0,1)$を視点として xy 平面に投射するときは，$z<1$ の部分が対象となる。実際には，$z=1$ に近いところは，拡大されすぎて誤差が大きすぎるため，地図として意味を持たないから，$z<\dfrac{1}{2}$ の部分が対象となる。

経線を表す半円 $y^2+(z-1)^2=1-t^2$，$x=t$（$-1<t<1$，$t\neq 0$，$z<1$）について

この半円周上の点 P(t,y,z) と中心 C$(0,0,1)$ を結ぶ直線は，u を媒介変数として，

$$(X,Y,Z)=(0,0,1)+u(t,y,z-1)$$

※1　球面と，その中心を通る平面との交わりの円。

と表される。この直線と xy 平面との交点 Q は $Z=0$ より $0=1+u(z-1)$ $\quad\therefore\quad u=\dfrac{1}{1-z}$

よって，$(X,Y,Z)=\left(\dfrac{t}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}, 0\right)$

$t\neq0$ のとき，$X\neq0$ だから，$1-z=\dfrac{t}{X}$，

$y=(1-z)Y=\dfrac{tY}{X}$ を $y^2+(z-1)^2=1-t^2$ に代入して

$$\left(\frac{tY}{X}\right)^2+\left(-\frac{t}{X}\right)^2=1-t^2$$

$$t^2Y^2+t^2=(1-t^2)X^2$$

$$\therefore\quad \frac{X^2}{\dfrac{t^2}{1-t^2}}-Y^2=1 \quad (Z=0)$$

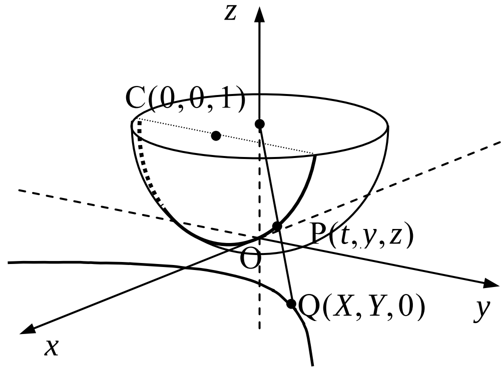


図 1.9　経線の投影（視点は球の中心）

$X=\dfrac{t}{1-z}$，$z<1$ より，$t>0$ のとき $X>0$，$t<0$ のとき $X<0$ となる。

よって，図 1.4 における曲線は双曲線の一部である。

経線を表す平面 $y\cos\theta+z\sin\theta=\sin\theta$ 上の半円については，この平面と xy 平面との交線は直線となるから，経線は直線に移される。すなわち，図 1.4 における線分に移される。

(g)　平射図法の場合

北極点 $\mathrm{N}(0,0,2)$を視点として xy 平面に投影する。

球面 $S: x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 上に N と異なる点 $\mathrm{P}(x,y,z)$（$z\neq2$）に対して，直線 NP と xy 平面との交点を R とする。R の座標$(X,Y,0)$を x,y,z で表すと，

直線 NP の方程式は，u を媒介変数として

$$(X,Y,Z)=(0,0,2)+u(x,y,z-2)$$

と表される。ここで，xy 平面との交点 R は $Z=0$ より，$0=2+u(z-2)$ $\quad\therefore\quad u=\dfrac{2}{2-z}$

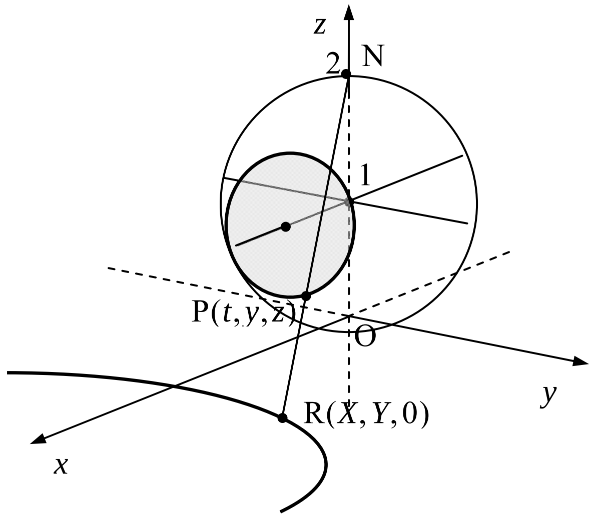


図 1.10　経線の投影（視点は北極点）

よって，$(X,Y,0)=\left(\dfrac{x}{2-z}, \dfrac{y}{2-z}, 0\right)$

経線を表す半円 $y^2+(z-1)^2=1-t^2$，$x=t$

（$-1<t<1$，$t\neq0$）について，その投影してできる曲線は

(f)と同様に，$x=t$ より $2-z=\dfrac{t}{X}$，$y=(2-z)Y=\dfrac{tY}{X}$ を $y^2+(z-1)^2=1-t^2$ に代入して

$$\left(\frac{tY}{X}\right)^2+\left(1-\frac{t}{X}\right)^2=1-t^2 \text{ より，} t^2Y^2+(X^2-2tX+t^2)=(1-t^2)X^2$$

$$t^2Y^2+t^2X^2-2tX+t^2=0 \qquad \therefore\quad \left(X-\frac{1}{t}\right)^2+Y^2=\frac{1}{t^2}-1$$

よって，図 1.6 における曲線は円の一部である。

同様に，経線を表す平面 $y\cos\theta+z\sin\theta=\sin\theta$ 上の円についても，その像は円となる。

演習 1.1. (g)の場合について，$X=\dfrac{x}{2-z}, Y=\dfrac{y}{2-z}$ と $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ から，y,z を X,Y で表しなさい。その結果から，視点が N(0,0,2)のとき，球面 $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ と平面 $y\cos\theta+z\sin\theta=\sin\theta$ との交円の，xy 平面への投影が円になることを示しなさい。

解　$x=(2-z)X$，$y=(2-z)Y$ を $x^2+y^2+(z-1)^2=1$ に代入して整理すると，

$(2-z)\{(2-z)X^2+(2-z)Y^2-z\}=0$　　ここで，$z\neq2$ より　$z=\dfrac{2X^2+2Y^2}{X^2+Y^2+1}$　…①　となる。

①より $2-z=\dfrac{2}{X^2+Y^2+1}$，$y=\dfrac{2Y}{X^2+Y^2+1}$ を $y\cos\theta+z\sin\theta=\sin\theta$ に代入し整理すると

$\sin\theta\neq0$ のとき，$\dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta}Y+2X^2+2Y^2=X^2+Y^2+1$ より，$X^2+Y^2+\dfrac{2\cos\theta}{\sin\theta}Y-1=0$

$\sin\theta=0$ のとき，$Y=0$（x 軸）となり，直線も円の一種とみなす。

よって，いずれの場合も円に移される。

(3)　円々対応

平射図法の場合，緯線や経線だけでなく，球面上のすべての円は円に対応する。このような対応を円々対応という。これはすべての角度を保つ等角写像になっている。このことについて，簡単に説明しよう。

南極 S における接平面に, 北極点 N から球面上の点 P を投影した像を P′とする。点 P における 2 曲線（2 つの大円）の接線と平面との交点を Q，R とする。

このとき, PQ, PR は接線だから，平面 PQR は球の接平面である。QR と SP′の交点を M, 球の中心を O とすると，図 1.12 より

SP⊥NP′，OP⊥PM,

ON=OS=OP，△NSP ∽ △SP′P

であるから，

∠OSP=∠OPS=∠MPP′=∠MP′P

よって，MP=MP′ … ①

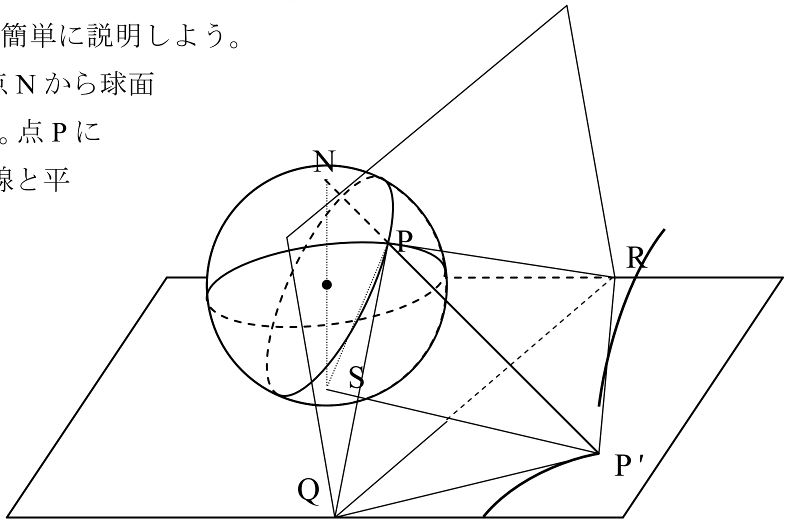


図 1.11　等角写像

図 1.11 において，NP′⊥平面 PQR より NP⊥QR,

また，NS⊥平面 SQR より NS⊥QR

よって，平面 NSP⊥QR だから，

∠QMP = ∠QMP′（= 90°）… ②

また，QM が共通であるから，①，②より

△QMP≡△QMP′　　　∴　QP = QP′

同様に, △RMP ≡ △RMP′より　RP=RP′　である。

QR が共通であるから，△PQR≡△P′QR　である。

このことから，∠QPR=∠QP′R が成立する。

ゆえに，平射図法が等角図法であることがわかる。

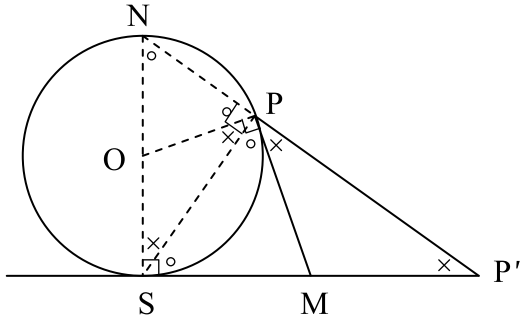


図 1.12　両極を含む平面による切り口

２．サンソン図法

経線と緯線に沿って座標をとることにより，球面を平面に変換することを考えてみよう。

これから，座標変換を行ったり，微積分で取り扱ったりするので，経度と緯度を度数法で表すのではなく，その角に対応する弧度法で表すことにする。

地球の表面（球面）に，経度 0（通常は 0°と書くべきであるが，先の理由から弧度で 0 と書くことにする）を縦軸（y 軸）とし，赤道（緯度 0）を横軸（x 軸）にとることにより座標平面に表す。具体的には，経度λ（東経$\lambda>0$，西経$\lambda<0$），緯度φ（北緯$\varphi>0$，南緯$\varphi<0$）の地球の表面（半径 R の球面）上の点 P を，経線と緯線に沿って向きを付けて長さを測り，それを平面（地図）上の点 Q(x,y)に変換する。

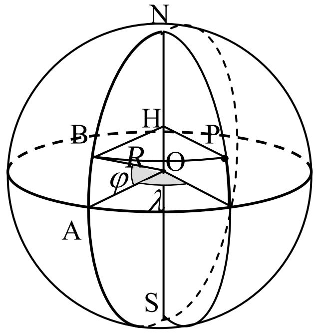


図 2.1　経度と緯度

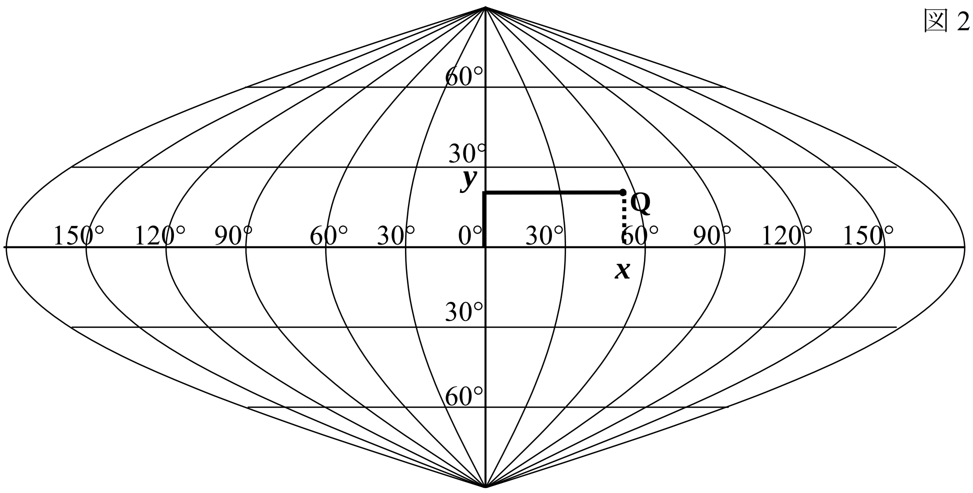


図 2.2　サンソン図法

図 2.1 において，経度 0，緯度φの点を B とすると，

∠AOB=φ だから，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}=R\varphi$（符号を含めて）（弧度法の定義より，弧の長さ=中心角×半径）

地点 B（または地点 P）から地軸 NS に垂線を下ろしたときの交点を H とすると，

$$\mathrm{BH}=R\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=R\cos\varphi$$

$$\overset{\frown}{\mathrm{BP}}=\mathrm{BH}\times\lambda=R\cos\varphi\times\lambda=R\lambda\cos\varphi$$（符号を含めて）

よって，

$$x=R\lambda\cos\varphi,\ \ y=R\varphi \tag{2.1}$$

ここで，λを定数とみて，$x=R\lambda\cos\dfrac{y}{R}$ で表されるので，この変換によって経線はサインカーブに移される。

このように描く地図図法を**サンソン図法**という。この図法では，緯線に沿って長さが等しく保たれているから，**等積図法**である。

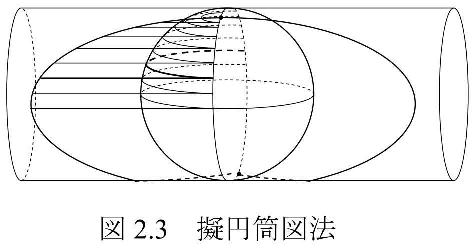


図 2.3　擬円筒図法

サンソン図法は擬円筒図法であり，中・高緯度の歪みを緩和した図法に，モルワイデ図法がある。

実習 2.1　サンソン図法で描かれた地図をもとに地球儀を作ってみよう。

準備するもの

発泡スチロール球（直径 10～15cm 程度）

サンソン図法による地図（発泡スチロール球の直径×円周率）

カッター，定規，カッティングマット，両面テープ

地図を幅 1～2mm 程度に裁断して（すべてを切り離さず，真中部分は残しておく），両面テープで張り合わせる。

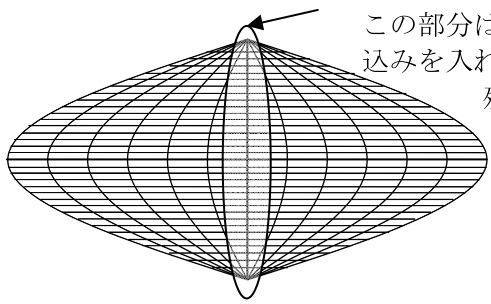


図 2.4　地図の裁断図

図 2.5　見本 1

図 2.6　見本 2

３．球面三角法

球面上の 2 点間の距離を調べたり，天体の運行を調べたりするためには，球面三角法が必要になる。そこで，球面上の三角形について考えてみよう。

球面と平面の交わりは円である。そのうち，球の中心を通る平面と球面との交わりを大円という。

球面上の 2 点 A，B に対して，AB が直径でないとき，A，B を通る大円はただ一つある。この大円は 2 点 A，B によって 2 つの円弧に分けられる。その短い方の円弧の長さを球面上の 2 点間の距離と定める。

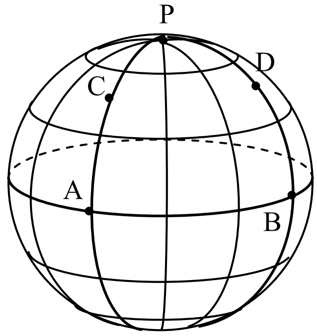


図 3.1　大圏航路

演習 3.1. 地球儀 S 上での，赤道上の 2 点(0°,0°), (0°,90°E)の距離，および 2 点(45°N,0°), (45°N,90°E)の距離を求めなさい。ただし，N は北緯，E は東経の意味である。

解　赤道上の 2 点(0°,0°)，(0°,90°E)の距離は，半径が 1 だから　$2\pi\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$

である。

2 点(45°N,0°)，(45°N,90°E)の距離について，右図 3.2 において

$\mathrm{OH}=\mathrm{HC}=\mathrm{HD}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ であるから

CD=1 である。よって，△OCD は正三角形だから，∠COD=60°となり，大円の弧 CD の長さ（CD の距離）は

$2\pi\times\frac{1}{6}=\frac{\pi}{3}$　である。

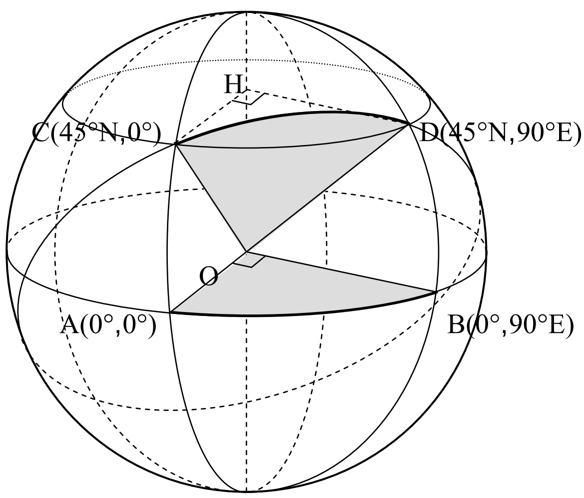


図 3.2　2 地点の最短距離

球の中心 O を頂点とする三面角 O-ABC の内部にある球面上の図形を**球面三角形**という。3 つの辺 BC，CA，AB は大円の弧である。2 辺のなす角（内角）は，2 つの大円の交角である。すなわち，それぞれの大円を含む平面のなす角に等しい。辺の長さは，半径 1 の球面では大円の弧に対する中心角に等しいので, 球面三角形は半径 1 の球面で考え，3 辺と 3 角の 6 要素ともに角の大きさを表すものとみなす。球面三角形 ABC において，辺の長さ a,b,c と角の大きさ A,B,C の間に成立する関係について調べてみよう。

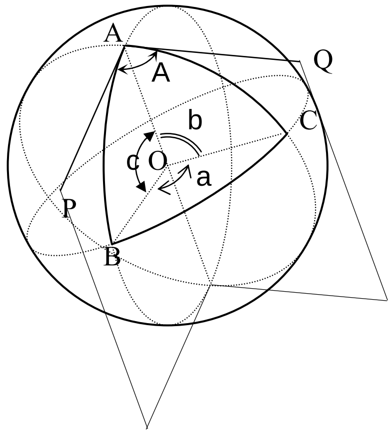


図 3.3　球面三角形

点 A において弧 AB，AC に接線を引き，OB，OC の延長との交点をそれぞれ B′，C′ とする。OA=OB=OC=1，$\angle\mathrm{OAB}'=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{OAC}'=\dfrac{\pi}{2}$ であるから，

$$\mathrm{AB}'=\tan c,\qquad \mathrm{AC}'=\tan b,$$

$$\mathrm{OB}'=\frac{1}{\cos c},\qquad \mathrm{OC}'=\frac{1}{\cos b}$$

である。△AB′C′ において，余弦定理より

$$\mathrm{B}'\mathrm{C}'^2=\tan^2 c+\tan^2 b-2\tan c\tan b\cos A$$

また，△OB′C′ において，余弦定理より

$$\mathrm{B}'\mathrm{C}'^2=\left(\frac{1}{\cos c}\right)^2+\left(\frac{1}{\cos b}\right)^2-2\frac{1}{\cos b\cos c}\cos a$$

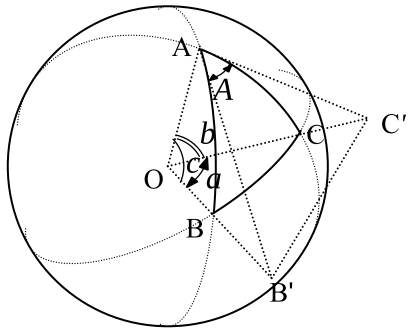


図 3.4　球面三角法の正弦定理

よって，

$$\tan^2 c+\tan^2 b-2\tan c\tan b\cos A=\left(\frac{1}{\cos c}\right)^2+\left(\frac{1}{\cos b}\right)^2-2\frac{1}{\cos b\cos c}\cos a$$

$$2\frac{1}{\cos b\cos c}\cos a=\frac{1}{\cos^2 b}-\tan^2 b+\frac{1}{\cos^2 c}-\tan^2 c+2\tan c\tan b\cos A$$

$$=2+2\tan c\tan b\cos A$$

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A \tag{3.1}$$

が成立する。対称性から，$\cos b,\cos c$ を同様の式で表すことができる。これらの式を球面三角法の余弦定理という。また，球面三角法の正弦定理

$$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C} \tag{3.2}$$

が成立する。

演習 3. 2. 半径 1 の球面上に 3 点 A，B，C がある。3 つの大円の弧 BC，CA，AB で囲まれる部分（球面三角形 ABC）の面積を，2 辺のなす角（内角）をそれぞれ A，B，C とするとき，角の大きさ A,B,C で表しなさい。

解　2 つの大円によって球面が 4 つの部分に分けられるうち，内角 A の月形の面積は

$4\pi\times\dfrac{A}{2\pi}=2A$（∵半径 1 の球だから表面積は 4π）

内角が A,B,C の 3 つの月形の面積を加えると，半球面と 2 個の球面三角形 ABC ができるから，球面三角形 ABC の面積は，　$\dfrac{1}{2}(2A+2B+2C-2\pi)=A+B+C-2\pi$

４．心射・円錐・円筒図法

球面上の点を，平面上に表すには 1 点から投影する方法が考えられる。直接，平面に投影する方法もあるが，円錐面や円柱面に投影して，それを展開する方法がある。投影の中心や投影面は，いろいろな位置にとることができるが，まずは投影の中心（光源）を球の中心にとる基本的な場合について考えてみよう。

(1)　心射図法

下図 4.1 のように，北極点 N における接平面に，球の中心から投影する場合を考える。ただし，球の半径を R とする。

北極点 N を原点として，経度 0 の経線が x 軸の正の部分，経度πの経線が x 軸の負の部分を表すように，また東経部分が $y>0$ に，西経部分が $y<0$ となるように投影する。

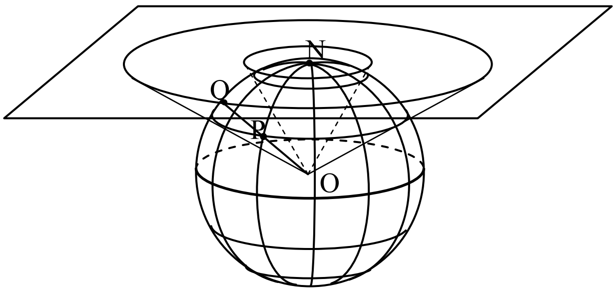


図 4.1　心射図法による緯線の像

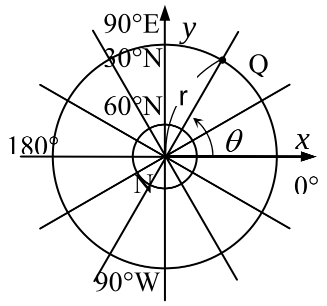


図 4.2　心射図法による極座標

演習 4. 1. 北緯$\dfrac{\pi}{3}$，東経$\dfrac{\pi}{6}$の地点 P (60°N,30°E) が投影される点を Q とする。NQ の長さおよび点 Q の座標を答えなさい。

解　点 P は北緯$\dfrac{\pi}{3}$だから，$\overset{\frown}{\mathrm{NP}}$ に対する中心角が$\dfrac{\pi}{6}$である。よって，NQ=NO×tan$\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}R$

NQ は，角$\dfrac{\pi}{6}$の動径を表すから（図 4.2），点 Q の座標は，

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}R\cos\frac{\pi}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{3}R\sin\frac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{1}{2}R,\ \frac{\sqrt{3}}{6}R\right)$$

一般の場合について，経度λ，北緯φ（東経$\lambda>0$，西経$\lambda<0$）の点 P が投影される点 Q の座標を求めてみよう。

点 P は北緯φだから，$\overset{\frown}{\mathrm{NP}}$ に対する中心角が$\dfrac{\pi}{2}-\varphi$ である。

よって，NQ=NO×tan$\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)=\dfrac{R}{\tan\varphi}$

NQ は，角λの動径を表すから，点 Q の座標は，

$$\left(\frac{R}{\tan\varphi}\cos\lambda,\ \frac{R}{\tan\varphi}\sin\lambda\right) \tag{4.1}$$

で表される。

⑵　円錐図法

球面を，両極を通る軸を持つ外接円錐面に投影して，その円錐の側面を展開することによって平面に変換する方法がある。

経度λ(東経$\lambda>0$, 西経$\lambda<0$)，緯度φ（北緯$\varphi>0$，南緯$\varphi<0$）の点 P が投影される外接円錐面上の点を Q とする。ここで，球の半径を R，外接円錐面の頂角を 2α とし，経度 0 の経線が移される直線を VX，VQ=r，∠RVX=θ（VX を始線とする動径 VQ が属する角で，符号を含めて考える）とする。

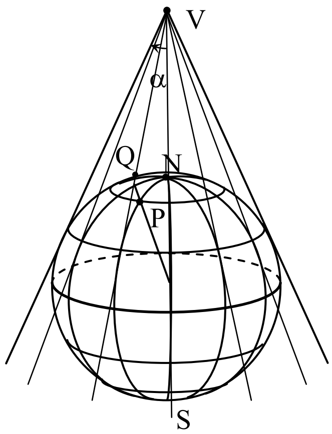


図 4.3　球と円錐面

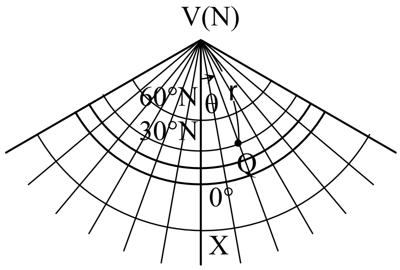


図 4.4　円錐図法

このとき，r，θ をλ，φを用いて表してみよう。

図 4.5 のように，点 T，H をとる。

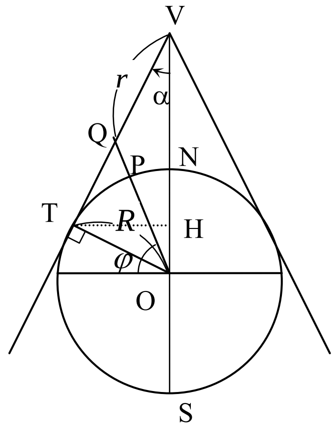


図 4.5　球と円錐の位置関係

OV=$\dfrac{R}{\sin\alpha}$　で，△OVQ において正弦定理を利用すると，

$$\frac{r}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)}=\frac{\mathrm{OV}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi-\alpha\right)}$$

$$r=\frac{R}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\varphi\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\varphi-\alpha\right)}=\frac{R\cos\varphi}{\sin\alpha\cos(\varphi-\alpha)}$$

円錐面の側面の扇形の中心角は，母線の長さ VT に対する半径 TH の比であるから，$2\pi\times\sin\alpha$

よって，$\theta=\dfrac{\lambda}{\pi}\times\pi\times\sin\alpha=\lambda\sin\alpha$

$$r=\frac{R\cos\varphi}{\sin\alpha\cos(\varphi-\alpha)},\quad \theta=\lambda\sin\alpha \tag{4.2}$$

⑶　円筒図法

球面を，両極を通る軸を持つ外接円柱面上に投影して，その円柱の側面を展開することによって平面に変換する方法がある。

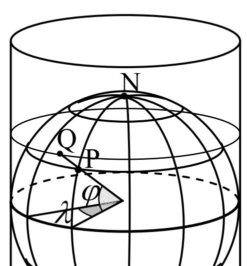


図 4.6　球と外接円柱

演習 4.2. 経度λ（東経$\lambda>0$，西経$\lambda<0$)，緯度φ（北緯$\varphi>0$，南緯$\varphi<0$）の点 P が投影される円柱面上の点を Q とする。経度 0 の経線が移される直線を y 軸とし，赤道が移される直線を x 軸として，点 Q(x, y)の座標をλ，φを用いて表しなさい。ただし，球の半径を R とし，東経部分を $x>0$，西経部分を $x<0$ とする。

解　経度 0，緯度 0 の点を A，経度λ，緯度 0 の点を K とし，球の

中心を O とするとき，$x>0$ のとき，x は半径 R，中心角λの弧 AK の長さであるから，$x=R\lambda$

これは $x\leq 0$ でも成立する。また，$y>0$ のとき，y=KQ は直角三角形 OKQ の∠KOQ=φ に対する対辺だから，$y=R\tan\varphi$ である。これは $y\leq 0$ のときも成立する。

よって，　$x=R\lambda$，$y=R\tan\varphi$

5．ランベルト正積円筒図法

円筒図法の 1 つで，正積図法であるランベルト正積円筒図法について紹介しよう。

球面を，両極を通る軸を持つ外接円柱面上に投影して，その円柱の側面を展開することによって平面に変換する方法があるが，視点は両極を通る軸である。

経度λ（東経$\lambda>0$，西経$\lambda<0$），緯度φ（北緯$\varphi>0$，南緯$\varphi<0$）の点 P に対して，P から両極を通る軸 NS に垂線 PH を引く。HP の延長と赤道で接する外接円柱との交点を Q とする。点 P を点 Q に対応させて，球面を平面に変換する方法である。

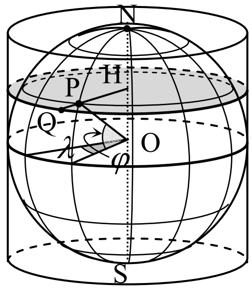


図 5.1　球と外接円柱

経度 0 の経線が移される直線を y 軸とし，赤道が移される直線を x 軸とし，球の半径を R として，点 Q(x,y)の座標をλ，φで表すと，

$$x=R\lambda,\ y=R\sin\varphi \tag{5.1}$$

である。

これによって作られる地図が等積であることを示そう。

その準備として，円錐面および円錐台の側面の面積について，簡単に述べておこう。

半径 r，中心角θの扇形の面積 S は，弧の長さを l とすると，

$$S=\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}lr \tag{5.2}$$

で表される。これは，底辺の長さが l（弧の長さ），高さが r（半径）の三角形の面積と考えられる。（下図 5.2 を参考）

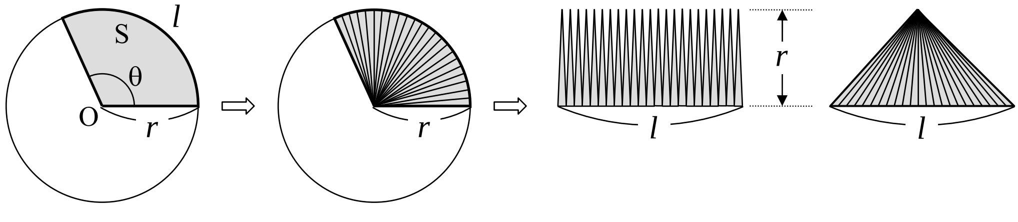


図 5.2　扇形の面積

これを参考にして，円錐面および円錐台の側面の面積を簡単に求めよう。

底面が半径 r の円で，母線の長さが l である直円錐の側面積は，弧の長さが $2\pi r$，半径が l の扇形の面積だから，　$\frac{1}{2}\times 2\pi r\times l=\pi lr$ で表される。

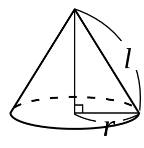


図 5.3　円錐

直円錐の側面積　πlr　（半径 r，母線の長さ l）　(5.3)

次に，図 5.4 のような底面の半径が a，上面の半径が b，母線の長さが l である直円錐台の側面

積を考えてみよう。

図 5.4 のように l' をとると，直円錐台の側面は，底面が半径 a，母線の長さが $l+l'$ である直円錐の側面から底面が半径 b，母線の長さが l' である直円錐の側面を除いたものである。すなわち，底辺の長さ a，高さ $l+l'$ の三角形から底辺の長さ b，高さ l' の三角形を除いたものである。

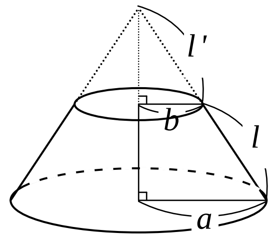


図 5.4　円錐台

よって，上底の長さ $2\pi b$，下底の長さ $2\pi b$，高さ l の台形の面積に等しいから，

$$\frac{1}{2}\times(2\pi b+2\pi b)\times l=\pi(a+b)l$$

直円錐台の側面積　$\pi(a+b)l$（底面の半径 a，上面の半径 b，母線の長さ l）　(5.4)

見方を変えると，直円錐台の側面積は，母線の長さ l と上面の円周と底面の円周の平均，すなわち上面と底面の中央の円周の積で表される。

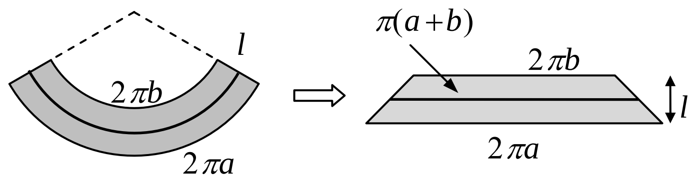


図 5.5　円錐台の側面積

変換式(5.1)　$x=R\lambda$，$y=R\sin\varphi$ において，図 5.6 のような緯度 φ で接する外接円錐台を考える。高さを $2\Delta y$ とすると，PH=$R\cos\varphi$ で，母線の長さは軸 NS と P における接線 AB のなす角が φ だから $\dfrac{2\Delta y}{\cos\varphi}$ である。よって，外接円錐台の側面積は，

$$2\pi R\cos\varphi\times\frac{2\Delta y}{\cos\varphi}=2\pi R\times 2\Delta y$$

となる。すなわち，$y-\Delta y$ と $y+\Delta y$ の間の部分にある円柱の側面積に等しい。

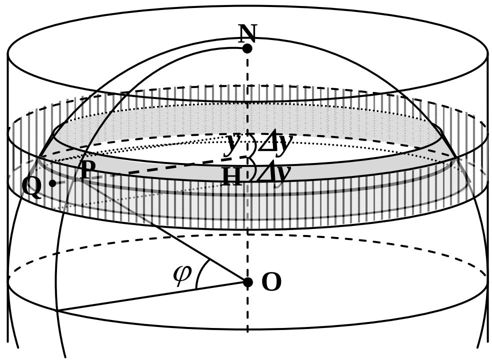


図 5.6　円錐台の側面と円柱の側面の関係

Δy を十分小さくとれば，微小の区間における外接円錐台の側面積と同一区間における円柱の側面積が常に等しいから，この変換は，等積変換である。

よって，この図法は正積図法であり，ランベルト正積円筒図法と呼ばれている。

地球の大円は球の中心を通る平面上にあるから，大円をこの図法で変換すると，球の中心を通る平面上の図形に移る。円柱面を平面で切って側面を展開すると，切り口は正弦曲線である。このことから，この地図では，大圏航路[※2]は正弦曲線となって現れる。

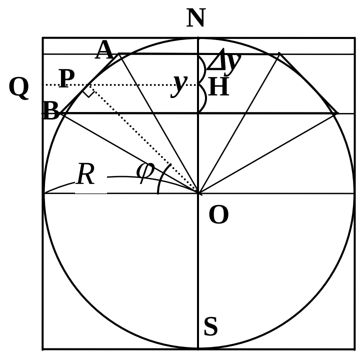


図 5.7　円錐台の側面と円柱の側面の関係

※2 地球の大円（すなわち大圏）に沿った航路で，始点と終点とを結ぶ最短距離となる。大圏コース。

実習 5.1　円柱面を平面で切って側面を展開すると，切り口は正弦曲線となることを確かめてみよう。

準備するもの

発泡スチロール円柱（配管保護用発砲スチロール柱でも可，直径 10cm 程度で発泡カッターで切断できる幅のもの），

ミラマット，発泡カッター，セロテープ

発泡スチロール円柱にミラマットを巻き付けて，セロテープで止める。それを発泡カッターで斜めに切断して巻き付けたミラマットを開く。

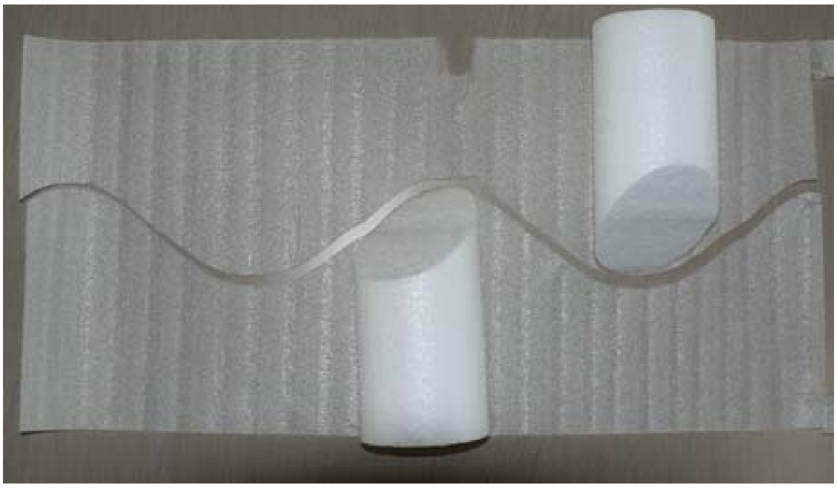


図 5.8　見本

演習 5.1. 円柱の半径を 1 とし，図のように，座標軸が設けられた紙（平面）を円柱の側面に巻きつけ，x 軸によって囲まれる円周の，原点 O を端点とする直径を含み，その円周を含む平面と 45°の角をなす平面で切断するとして，切り開かれた紙（展開図）における切り口の曲線の方程式を求めなさい。

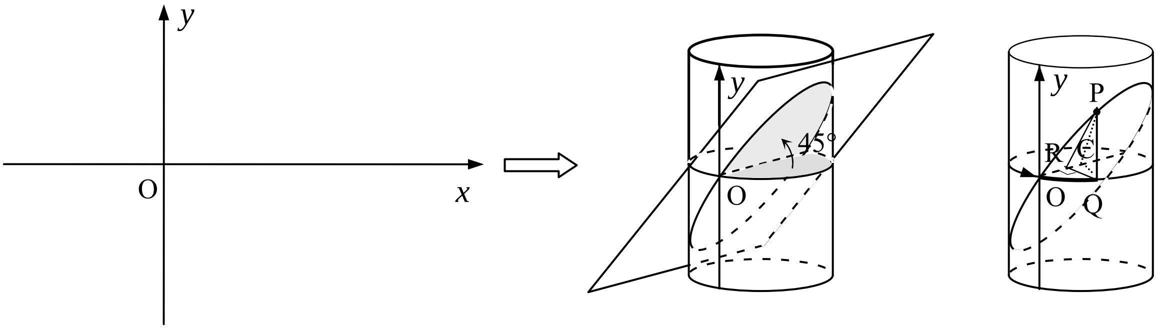


図 5.9　円柱の切断

解　右上図のように，切り口上に点 P をとり，P から x 軸に垂線を下ろしたときの交点を Q，x 軸によって囲まれる円周の中心を C，Q から OC に垂線を下ろしたときの交点を R とする。

$\overset{\frown}{\mathrm{OQ}}=x$ だから，円 C の半径は 1 なので，$\overset{\frown}{\mathrm{OQ}}$ に対する中心角は x である。

$\mathrm{QR}=\mathrm{CQ}\sin x=\sin x$ で，$\angle\mathrm{PRQ}=45^\circ$ だから，$y=\mathrm{PQ}=\mathrm{QR}=\sin x$

$x>\pi$ のとき $y<0$ で，符号を含めて，$y=\sin x$ で表される。

６．メルカトル図法

図 6.1　メルカトル図法

よく用いられる地図に，メルカトル図法がある。これは, 1569 年にオランダのメルカトルが考案した正角円筒図法で，赤道付近での歪みは小さく，高緯度地方は極端に拡大され，歪みの限界を考えて上下 75 度付近までを表示することが多い。経線方向の歪みと緯線方向の歪みが等しくなるように，緯線間隔を補正して正角にしている。2 地点間に直線を引いて経線となす角度を測ることで方位がわかるので，航海図などに広く用いられていた。この航路は航程線といわれ，大圏コースではない。

ここで，経線方向の歪みと緯線方向の歪みが等しくなるように，緯線間隔を補正することについて考えてみよう。

円筒図法は，すでに述べたように地球の外接円筒面上に地球表面の射影を映してその形を描く方法である。図 6.2 のように，地球の中心を射影の中心とし，地球の表面 ABCD が円筒面上の図形 PQRS に投影されるとする。緯度をφ（$-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 北緯を正，南緯を負）とし，経度をλ（$-\pi\leq\lambda\leq\pi$，東経を正，西経を負）とする（図 6.2）。地球の表面を円筒上に射影して，それを展開して平面で表したときの点の座標を(x,y)として考える（図 6.5）。このとき, 赤道を x 軸，経度 0 を y 軸とする。地球を半径 R の球形と考え，地球の表面上の点 A の緯度をφ，経度をλとし，点 C の緯度を$\varphi+\Delta\varphi$，経度を$\lambda+\Delta\lambda$と

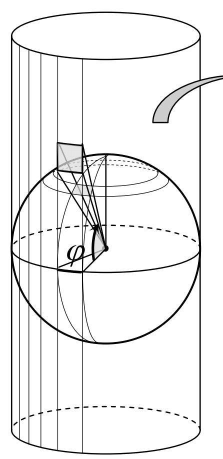


図 6.2　球と外接円柱

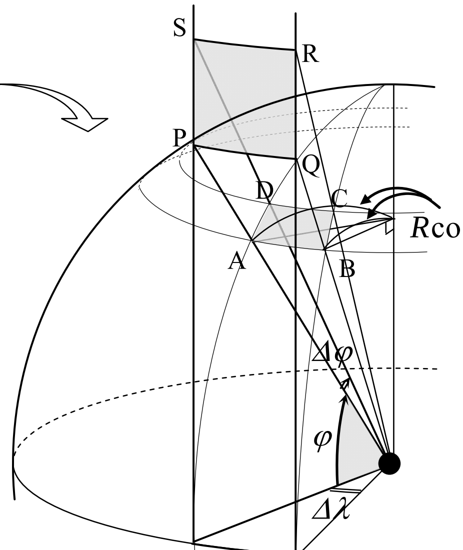


図 6.3　外接円柱への投影

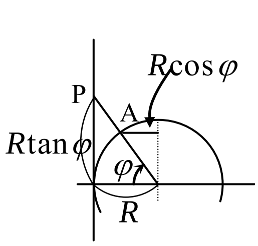


図 6.4　位置関係

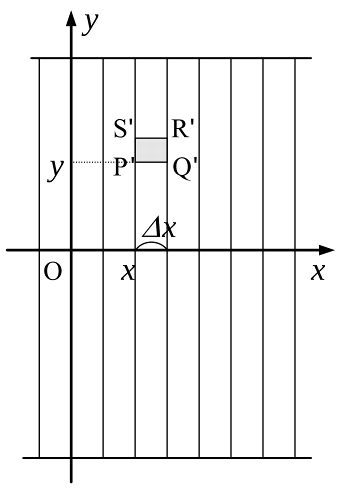


図 6.5　投影される長方形

する（図 6.3）。

地球の表面上では，□AB=$(R\cos\varphi)\Delta\lambda$，□BC=$R\Delta\varphi$だから，縦横の比率が$\dfrac{\square\mathrm{BC}}{\square\mathrm{AB}}=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta\lambda\cos\varphi}$ である。これに対して，地図上に射影された図形 P'Q'R'S'では，

P'Q'=□PQ=□KL=$R\Delta\varphi$，

Q'R'=QR=$R\tan(\varphi+\Delta\varphi)-R\tan\varphi$

となり，縦横の比率が $\dfrac{\mathrm{Q'R'}}{\mathrm{P'Q'}}=\dfrac{\tan(\varphi+\Delta\varphi)-\tan\varphi}{\Delta\lambda}$ で，地球の表面上の図形 ABCD のそれと異なる。等角（図 6.6 において AC と P'R'が同じ方向）であるためには，この縦横の比率が等しくなければならない。

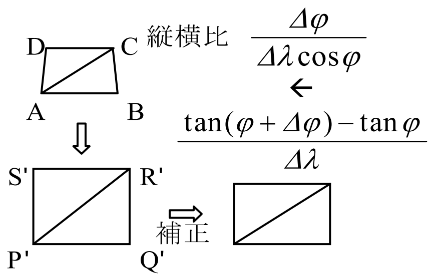


図 6.6　縦横の補正

そこで，図 6.6 における右下図の縦の長さを Δy とすると，

$$\frac{\square\mathrm{BC}}{\square\mathrm{AB}}=\frac{\Delta y}{\mathrm{P'Q'}} \tag{6.1}$$

となるように長さを補正する。すなわち，

$$\Delta y=\frac{R\Delta\varphi}{\cos\varphi} \tag{6.2}$$

となるように補正する。すべての y の値に対してこのようなことを考えると，縦横の比率が等しく，等角になる。

$$\frac{\Delta y}{\Delta\varphi}=\frac{R}{\cos\varphi} \tag{6.3}$$

の関係が成立するように y を定めればよい。これは，$\dfrac{dy}{d\varphi}=\dfrac{R}{\cos\varphi}$ であることを表している。（途中の計算過程において，図形 ABCD は台形に近い形をしているが，$\Delta\varphi\to 0$，$\Delta\alpha\to 0$ と極限を考えると，AB=CD となるので長方形のように扱っても差し支えない。）

赤道を y=0 にとるとき，緯度β（ラジアン）に対する地図上の位置は，

$$y=R\int_0^{\beta}\frac{1}{\cos\varphi}d\varphi \tag{6.4}$$

によって得られる。この定積分はいろいろな方法で求められるが，ここでは，$\tan\dfrac{\varphi}{2}=t$ とおく。

$$\cos\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1=\frac{2}{1+\tan^2\dfrac{\varphi}{2}}-1=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$\tan\dfrac{\varphi}{2}=t$ の両辺を t で微分して，$\dfrac{1}{2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}\dfrac{d\varphi}{dt}=1$

$$\therefore\quad \frac{d\varphi}{dt}=2\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{2}{1+t^2}$$

$\varphi:0\to\beta$ のとき，$t:0\to\tan\dfrac{\beta}{2}$ だから

$$y = R\int_0^{\tan\frac{\beta}{2}} \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = R\int_0^{\tan\frac{\beta}{2}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=R\left[-\log|1-t|+\log|1+t|\right]_0^{\tan\frac{\beta}{2}}$$

$$= R\left(-\log\left|1-\tan\frac{\beta}{2}\right|+\log\left|1+\tan\frac{\beta}{2}\right|\right)= R\log\left|\frac{1+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\beta}{2}}\right|$$

$$y=R\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)\right| \tag{6.5}$$

このようにして，メルカトル図法による地図が作られる。

参考文献

[1]　柴田　敏男，教師のための初等数学講座６　立体幾何・画法幾何，岩崎書店，1959 年.

[2]　黒田　轍，球面数学の基礎，成山堂書店，1975 年.