円周率を計算してみよう

金沢工業大学　基礎教育部
小山 陽一

ねらい

科学の歴史は，不思議な現象や理屈に合わない現象があると，それについて詳しく調べ，新しい仮説をたて，その仮説が問題の現象を説明できるか，仮説に矛盾がないか，などを研究することで発展して来ている．すでに出来上がった理論を（教育プログラムの）順序どおり理解していくことは，短時間でその理論を理解するには便利であるが，深みのないもので終わってしまうことも多いだろう．少し本筋から外れた現象でも疑問を持ち，それについて考えてみるということこそが科学の本質ではないだろうか．

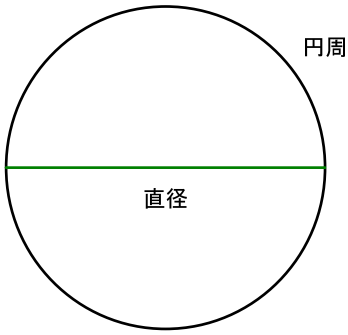
数学についても同様で，いろいろな定数や超越関数の値などが，どのように求められるかという疑問を持ち考えて見ることは，より深く数学を理解する上で重要なことである．

ここでは，「円周率」をとりあげ，その値を求める方法について，いくつかの側面から調べて見よう．数値計算自身が目的ではなく，計算方法を考えることが目的であるので，計算には表計算ソフト（エクセル）を使うことにしよう．

小学校５年生の算数の時間に「円周率」を学んで以降，数学の色々な場面で円周率 π が現れる．円周率の値は 3.14 ということは誰でも知っていることであるが，実際にこの値がどのようにして求まるか，ということは簡単ではない．

ここでは歴史的な円周率の求め方を振り返りながら，面倒な数値の計算はパソコンの表計算ソフト（エクセル）を用いて実際に計算して見よう．

円周率は「円周の長さと直径の比」ということはいいですね．



目次

1. アルキメデスの方法
2. 区分求積法を用いる方法
3. べき級数展開を用いる方法
4. まとめ

１．アルキメデスの方法

アルキメデス（Archimedes　BC.287－212）は，円に内接する正 96 角形と円に外接する正 96 角形の周の長さを計算して $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ であることを示した．

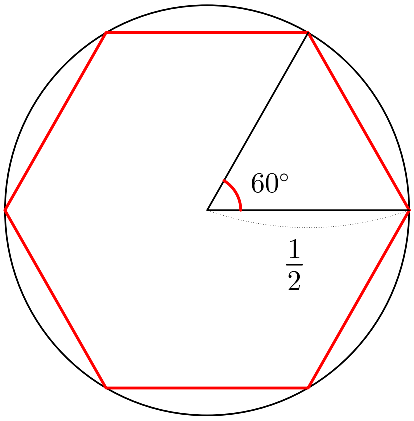
$$3\frac{10}{71} = 3.140845\cdots,\ 3\frac{1}{7} = 3.142857\cdots$$

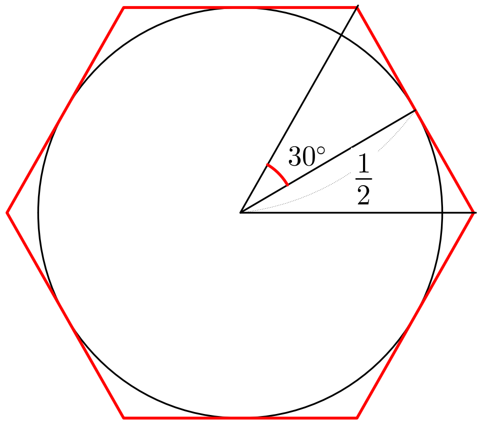
であるから，３桁目まで（すなわち 3.14 まで）正確に求めていたことになる．このアルキメデスの考えた手法を現代風に再現してみよう．

半径 $\frac{1}{2}$ の円に内接する正 n 角形の周の長さを a_n ，外接する正 n 角形の周の長さを b_n としよう．
直径が 1 であるから円周の長さは π であり，

$$a_n < \pi < b_n$$

となることはすぐにわかる．
$n=6$ （すなわち正 6 角形）の場合，一辺に対応する中心角は 60° であるから





$$a_6 = 6\times\frac{1}{2} = 3,\quad b_6 = 6\times\left(2\times\frac{1}{2}\tan 30^\circ\right) = 2\sqrt{3}$$

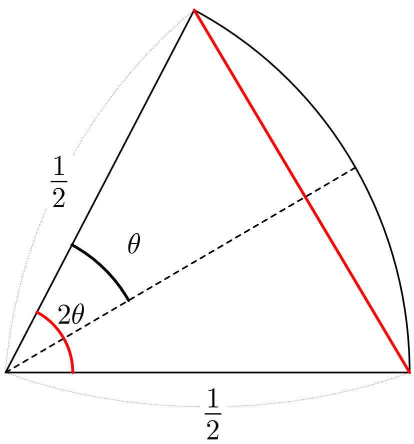
となる．次に n を増やしていくための定理を示そう．

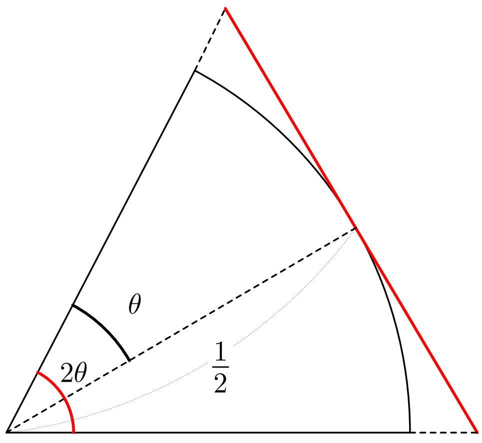
［定理］

半径 $\frac{1}{2}$ 円に内接する正 n 角形の周の長さを a_n ，外接する正 n 角形の周の長さを b_n とすると，

$$\frac{2}{b_{2n}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n},\quad {a_{2n}}^2 = a_n b_{2n}$$

という関係が成立する．





正 n 角形の一辺を取り出し，その中心角を 2θ とする（ $\theta = \frac{\pi}{n}$ ）．この正 n 角形の周の長さは

$$a_n = n\times\left(2\times\frac{1}{2}\sin\theta\right) = n\sin\theta,\quad b_n = n\times\left(2\times\frac{1}{2}\tan\theta\right) = n\tan\theta$$

である．正 $2n$ 角形の一辺に対応する中心角は θ であるから， $\theta = 2\varphi$ とすると

$$a_{2n} = 2n\sin\frac{\theta}{2} = 2n\sin\varphi, \quad b_{2n} = 2n\tan\frac{\theta}{2} = 2n\tan\varphi$$

となる．したがって

$$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} = \frac{1}{n\sin\theta} + \frac{1}{n\tan\theta} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{1}{n}\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{n}\frac{1+\left(2\cos^2\varphi - 1\right)}{2\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{1}{n}\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{2}{2n\tan\varphi} = \frac{2}{b_{2n}}$$

$$a_n b_{2n} = n\sin 2\varphi \times 2n\tan\varphi = 2n^2(2\sin\varphi\cos\varphi)\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \left(2n\sin\varphi\right)^2 = a_{2n}{}^2$$

となる．

さて，定理を使って

$$\left(a_6, b_6\right) \to b_{12} \to a_{12} \to b_{24} \to a_{24} \to \cdots$$

の順に計算していこう．手計算だと結構複雑になるので,「エクセル」で数値計算することにする．

	A	B	C
1	n	an	bn
2	6	3.0000000000	3.4641016151
3	12	3.1058285412	3.2153903092
4	24	3.1326286133	3.1596599421
5	48	3.1393502030	3.1460862151
6	96	3.1410319509	3.1427145996

=SQRT(B2*C3)

=2*SQRT(3)

=2*A2

=2/(1/B2+1/C2)

A3 をコピー

B3 をコピー

C3 をコピー

セルのプロパティで
表示形式を「数値」とし，
桁数を設定すると見やす
くなる

「B6」のセルに出ている値が a_{96} ，「C6」のセルに出ている値が b_{96} であるから

$$3\frac{10}{71} < a_{96} < \pi < b_{96} < 3\frac{1}{7}$$

というアルキメデスの求めた結果がえられた．

さらにエクセルでコピーを続けていけば

	A	B	C
1	n	an	bn
2	6	3.0000000000	3.4641016151
3	12	3.1058285412	3.2153903092
4	24	3.1326286133	3.1596599421
5	48	3.1393502030	3.1460862151
6	96	3.1410319509	3.1427145996
7	192	3.1414524723	3.1418730500
8	384	3.1415576079	3.1416627471
9	768	3.1415838921	3.1416101766
10	1536	3.1415904632	3.1415970343
11	3072	3.1415921060	3.1415937488
12	6144	3.1415925167	3.1415929274
13	12288	3.1415926194	3.1415927220
14	24576	3.1415926450	3.1415926707
15	49152	3.1415926515	3.1415926579
16	98304	3.1415926531	3.1415926547

となり，正 98304 角形では９桁までの精度で求まることがわかる.

２．区分求積法を用いる方法

定積分の計算結果に π を含む式が現れることがある．これを逆手にとって π の値を求めて見よう.

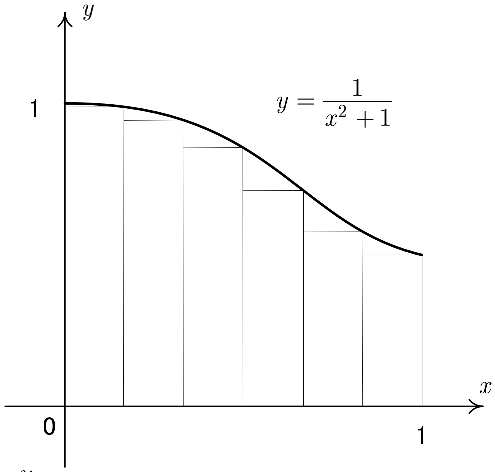
［定理］

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{\pi}{4}$$

これは，$x=\tan\theta$ とおくと $\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}$ であり，$x:0\to 1$ ならば $\theta:0\to\frac{\pi}{4}$ であるから

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx = \int_0^{\pi/4}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\pi/4}\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{\pi}{4}$$

という置換積分で求められる.



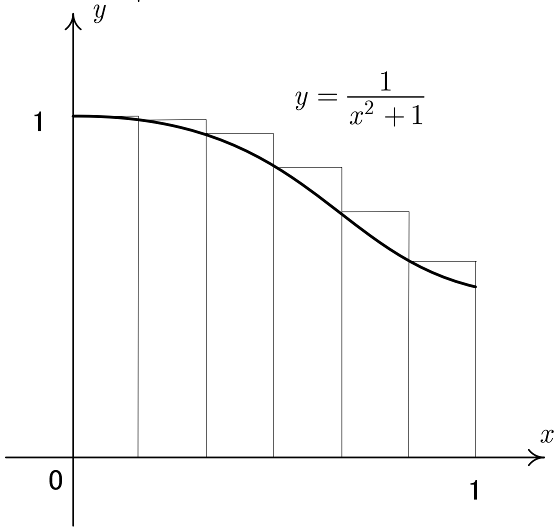
この積分を区分求積法で求める．$\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$ は曲線 $y=\frac{1}{x^2+1}$ と x 軸ではさまれる $0\le x\le 1$ の部分の面積であるから，区間 $0\le x\le 1$ を n 等分して図のような n 本の長方形の面積の面積と比較する.

$y=\frac{1}{x^2+1}$ は $x\ge 0$ の範囲で単調減少であるから長方形の面積は

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{n} = n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$$

と表せる．また，右図のように長方形が曲線より上にくるように取ると

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\cdot\frac{1}{n} = n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2}$$



となる．定理より $\pi = 4\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx$ であるから

$$4n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2} < \pi < 4n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2}$$

となる．さらに両端の差を取ると

$$4n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^2+k^2} - 4n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2} = \frac{2}{n}$$

となるので，求まる π の精度もわかる.

$n=10$ の場合をエクセルで計算して見ると

k	4n/(n^2+k^2)
0	0.4000000000
1	0.3960396040
2	0.3846153846
3	0.3669724771
4	0.3448275862
5	0.3200000000
6	0.2941176471
7	0.2684563758
8	0.2439024390
9	0.2209944751
10	0.2000000000
0-9 の和	**3.2399259889**
1-10 の和	**3.0399259889**

となるが，これぐらいではあまり良い精度で求まっていない．

３．べき級数展開を用いる方法

$\tan\theta = a \quad (-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$ 　のとき，$\theta = \tan^{-1} a$ と表し，この関数を逆正接関数という．
（正接 tan の逆関数ということ．）　これも用いると前の定理同様に

［定理］

$$\int_0^a \frac{1}{x^2+1}dx = \tan^{-1} a$$

と表せる（置換積分において積分区間 $x:0 \to a$ が $\theta:0 \to \tan^{-1} a$ となることに注意）．
ここで，$-1 < a \le 1$ のとき

$$\tan^{-1} a = \int_0^a \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^a \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\right)dx = a - \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5 - \frac{1}{7}a^7 + \cdots$$

と表すことができる．

［定理］

$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$$

これは $\tan^{-1}\frac{1}{2} = A,\ \tan^{-1}\frac{1}{3} = B$ とすると，$\tan A = \frac{1}{2},\ \tan B = \frac{1}{3}$ であるから

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}} = 1$$

すなわち，$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = A + B = \frac{\pi}{4}$ ．

このことから

$$\pi = 4\left(\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3}\right) = 4\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}\right) - \cdots\right\}$$

がえられる．最後にこれをエクセルで計算して見よう．

n	A=(-1)^(n+1)/(2n-1)	B=1/2^(2n-1)	C=1/3^(2n-1)	A*(B+C)
1	1.0000000000	0.5000000000	0.3333333333	0.8333333333
2	-0.3333333333	0.1250000000	0.0370370370	-0.0540123457
3	0.2000000000	0.0312500000	0.0041152263	0.0070730453
4	-0.1428571429	0.0078125000	0.0004572474	-0.0011813925
5	0.1111111111	0.0019531250	0.0000508053	0.0002226589
6	-0.0909090909	0.0004882813	0.0000056450	-0.0000449024
7	0.0769230769	0.0001220703	0.0000006272	0.0000094383
8	-0.0666666667	0.0000305176	0.0000000697	-0.0000020392
9	0.0588235294	0.0000076294	0.0000000077	0.0000004492
10	-0.0526315789	0.0000019073	0.0000000009	-0.0000001004
11	0.0476190476	0.0000004768	0.0000000001	0.0000000227
12	-0.0434782609	0.0000001192	0.0000000000	-0.0000000052
13	0.0400000000	0.0000000298	0.0000000000	0.0000000012
14	-0.0370370370	0.0000000075	0.0000000000	-0.0000000003
			計	0.7853981633
			X4	**3.1415926534**

４．まとめ

円周率の値を求めるための公式は，他にも多く考えられてきた．たとえば，

- $\dfrac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\dfrac{1}{5} - \tan^{-1}\dfrac{1}{239}$　　（マチンの公式　1706 年）
  マチン（イギリスの天文学者）が発見した公式で，これを用いて 100 桁まで求めている．
- $\dfrac{1}{\pi} = \dfrac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}$　　（ラマヌジャン　1910 年）
  インドの天才数学者ラマヌチャンが発見した公式．厳密な証明は 1987 年に完成．
- $\pi = \sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{16^k}\left(\dfrac{4}{8k+1} - \dfrac{2}{8k+4} - \dfrac{1}{8k+5} - \dfrac{1}{8k+6}\right)$　　（1995 年）
  カナダのベリー，ボールウェイン，ブラウフのよって発見された公式．
  (http://crd.lbl.gov/~dhbailey/)

などがある．最近では「算術幾何平均を用いる方法」により２千億桁まで計算されている（1999 年）．

【参考文献】

[1]　堀場芳数「円周率 π の不思議－アルキメデスからコンピュータまで」(ブルーバックス)(1989)
[2]　ベートル・ベックマン「π の歴史」（ちくま学芸文庫）(2006)
[3]　A.S.Posamentier　「不思議な数 π の伝記」(2005)
[4]　M.アイグナー，G.M.ツィーグラー「天書の証明」（シュプリンガー）(2002)

【注】　(2016.6.6)
p.3 真ん中の Excel の図の右上の吹き出しに２か所記述ミスがありました．
=3*SQRT(3) は =2*SQRT(3) が正しく，=2/(1/B2+1/C3) は =2/(1/B2+1/C2) が正しいものです．
この原稿はすでに修正してあります．古い原稿をお持ちの方は修正をお願いします．