２．面積から積分へ

ここまでの議論で図形の面積を求めるには、やはり適当に三角形や長方形に分割してそれらを足していくのが妥当な方法のようですが、それをもう少し理論的に納得できる形にしなければなりません。

まず具体的な例から見てみます。

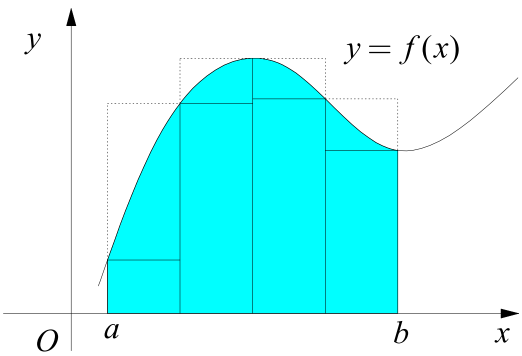

図 2.1

上の例では区間$[a, b]$ を４等分して、x 座標を左から順にそれぞれ

$$x_0 = a, x_1, x_2, x_3, x_4 = b$$

とし、図のような長方形を２種類作って曲線部分を囲み、本当の面積を上下から挟み込めば少なくとも求める面積はその間にあると想像できます。そこでこの上下の長方形の面積を考えてみます。

まず上の部分の長方形の面積の和S_4 は　小区間の幅$\dfrac{b-a}{4}$ をΔx と表わせば、

$$S_4 = f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x$$

同じく下の部分の長方形の面積の和s_4 は

$$s_4 = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_3)\Delta x + f(x_4)\Delta x$$

従って本当の面積をS とすれば明らかに

$$s_4 < S < S_4$$

であることがわかります。

上の図 2.1 の例で見てきたように、曲線で囲まれた図形の面積を考えるとき、既にわかっている事実（ここでは長方形の面積）を利用して限りなく求める図形に近づけて行くという方法をとるということです。さしあたり、これ以外の良い方法はないといってよいでしょう。もう少し詳しく説明すると以下に述べるようになります。

考え方：下図のように長方形で小さいほうからと、大きいほうからの両方からの挟み撃ちの形で近似する。

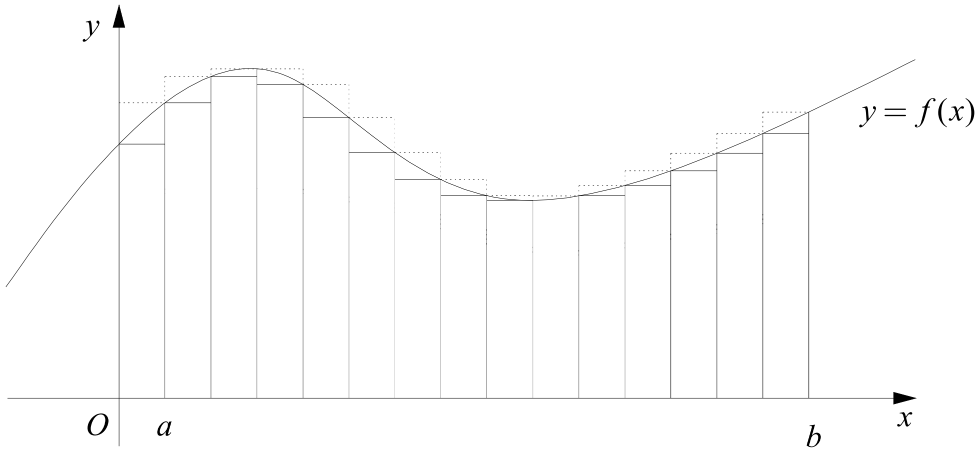

図 2. 2

例えば４分割を８分割更に１６分割に…と、どんどん細かくしていくと図形の真の面積と、挟み撃ちをしようとする長方形の面積との誤差は確実に減っていくのがわかります。

そこでこれを限りなく増やしていって（等分割の場合は、これを$n \to \infty$または$\lim_{n\to\infty}$という記号で表すが、そうと限らないときは、$\delta = \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$とおいて、$\delta \to 0$のように表す)、大きい方の長方形の面積の和と小さい方の長方形の面積の和とが一致すればそのときその値を求める図形の面積ということにします。区分求積法というのがその実際の求め方になるわけですがそれはこのシリーズ[1]に譲ることにして、これを一般な式の形でまとめてみましょう。
以下ここでは区間$[a\,,b]$で$f(x)>0$とします。
区間$[a\,,b]$をn分割（必ずしも等分割でなくてもよい）してこのときの分点を

$$\Delta:\ x_0 = a < x_1 < x_2 < \ \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

として各小区間$[x_{j-1}, x_j]$の範囲内での $f(x)$ の最小値をm_j、最大値をM_jとすると、まず小さい方の長方形の面積の和は

$$m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \cdots + m_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j \fallingdotseq s_\Delta$$

ただし　$\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$

次に大きい方の長方形の面積の和は

$$M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \cdots M_n(x_n - x_{n-1}) = \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j \fallingdotseq S_\Delta$$

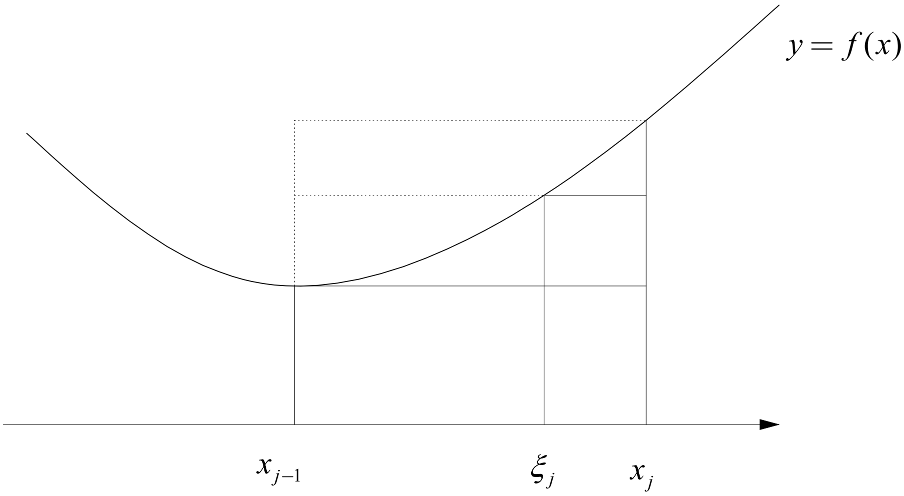

図 2. 3

ξ_j を各小区間$[x_{j-1}, x_j]$の中の任意の点とすれば明らかに

(2. 1) $$s_\Delta = \sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j \leq \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j \leq \sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j = S_\Delta$$

注：この(2. 1)の真ん中の項、$\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$ をリーマン和という。

このとき、$\delta = \max_{1\leq j\leq n} \Delta_{x_j}$ とおいて、もしも

(2. 2) $$\lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j = \lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j = S$$

ならばこのSの値を今の図形の面積と考えるのが自然でしょう。
それでは、どんな場合にこの関係式がなりたつのでしょうか。
上の(2. 2)を言い換えれば、

(2. 3) $$0 = S - S = \lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{n} M_j \Delta x_j - \lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{n} m_j \Delta x_j = \lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\Delta x_j$$

となります。このとき(2. 1)より

(2. 4) $$S = \lim_{\delta\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\Delta x_j$$

となりこれを簡単に表した式が

(2. 5) $$\int_a^b f(x)dx$$

です。
このような積分法を我々はリーマン積分（以下R積分と表現する）と呼び、この値が有限確定するとき、リーマン積分可能（同じくR積分可能）と言います。要するに通常の積分がリーマン積分なのです。そしてこれは$y = f(x)$ が閉区間$[a,b]$で$f(x)\geq 0$ ならば、x 軸と２直線$x = a, x = b$ および曲線$y = f(x)$ で囲まれる図形の面積を表します。

（2.3）から、もし、$y=f(x)$ が連続ならば、各小区間$[x_{j-1}, x_j]$で、$f(x)$の最小値m_j、最大値M_jを与えるそれぞれの点ξ_j, η_j （$x_{j-1} \le \xi_j, \eta_j \le x_j$）

があって$f(\xi_j)=m_j, f(\eta_j)=M_j$となり、$M_j - m_j$はいくらでも小さくできます。そして閉

区間$[a,b]$ を考慮すれば(2.3)が成り立つことが理解できるでしょう。（このような議論に不満を感じるならばそのときは是非本格的な数学書、例えば文献[2]等を読むことを薦めます。今の場合は関数の一様連続性の理解が必要なのです。）
以上をまとめると、$y=f(x)$ が連続ならば(2.2)が成り立ち、積分(2.5)の値が確定するということになります。