３．微分積分の基本定理

周知の微分積分の基本定理について、もう一度簡単にさらっておきます。

$y=F(x)$ のとき

$$F'(t)=\frac{dF(t)}{dt}=\lim_{\vartriangle t\to 0}\frac{F(t+\vartriangle t)-F(t)}{\vartriangle t}$$

であったから、これを図でみると今の場合、

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

とおくと、$F(t+\vartriangle t)-F(t)$ は下の図 3.1 の斜線部分の面積に等しい。さらにこの部分を拡大してみた図がその下の図 3.2 である。

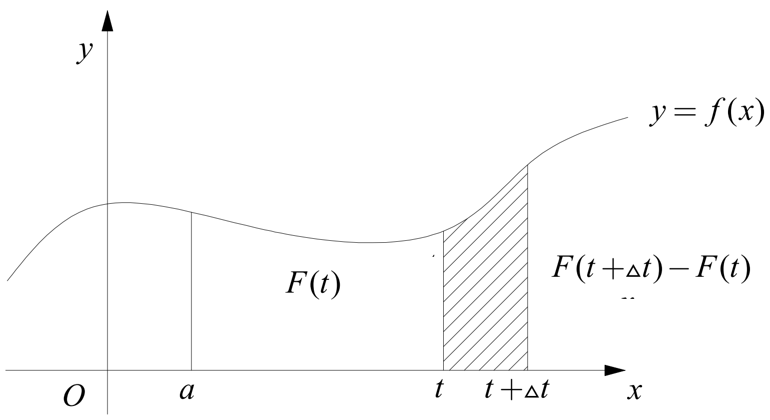


図 3.1

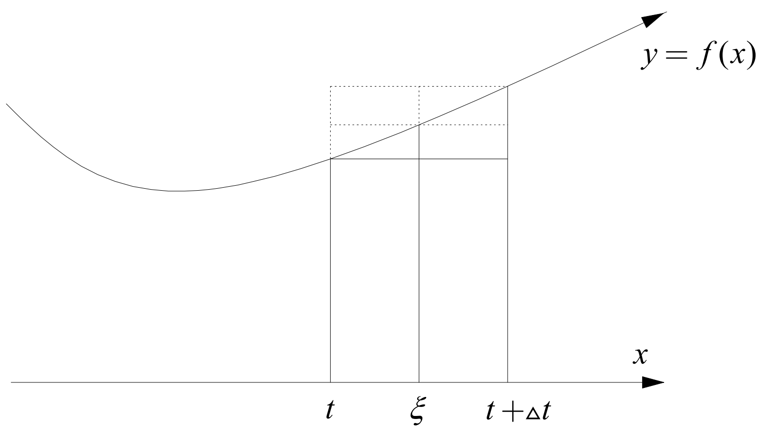


図 3.2

この斜線部分は、適当な（上の図にあるような）長方形の面積に等しいことがみてとれるであろう・（じつはこれが連続関数の持っている性質の１つを使っているのだが）

すなわち、長方形の面積＝底辺×高さ

$$= \Delta t \times f(\xi)$$

ここでξ はt と$t+\Delta t$ の間の適当な点にとれることがわかるでしょうから、
よって

$$t \leq \xi \leq t+\Delta t \quad で$$

$$F'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t \times f(\xi)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} f(\xi) \qquad t \leq \xi \leq t+\Delta t$$

$$= f(t)$$

これで予想が成り立つことがわかった。従って

(3.1) $$\left(\int_a^t f(x)dx\right)' = f(t)$$

だから$\int_a^t f(x)dx = F(t)$とおくと$F'(t) = f(t)$であり、$(F(t)+C)' = f(t)$もいえるから
今の面積の議論からすればこの C は確定した値でなければならない。たとえば
$t=a$とおけば図の面積は0でなければならないから、$t=a$を代入して

$$0 = \int_a^a f(x)dx = F(a)+C$$

よって　$C = -F(a)$ でなければならないから

$$\therefore \int_a^t f(x)dx = F(t) - F(a)$$

そこで $\int f(x)dx$ は $F'(x) = f(x)$ となる $F(x)$ と表すことにして

$$\int f(x)dx = F(x)$$

と書いてこれを $f(x)$ の不定積分、または $f(x)$ の原始関数といい、

(3.2) $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad （これを\left[F(x)\right]_a^b と表す）$$

を $f(x)$ の$x=a$から$x=b$までの定積分というのである。
良く知っている図形の場合と、三角関数の例で確かめてみよう。

［例 3.1］①

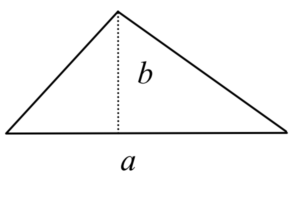
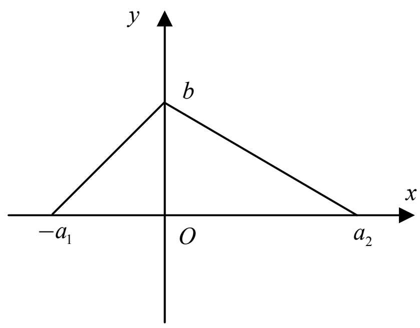


図 3.3



$a = a_1 + a_2$

図 3.4

ここで図 3. 3 のような三角形の面積を求めるために、上の式（3. 2）を使ってみよう。そのために右側の図 3. 4 のように座標をとれば、

$$\int_{-a_1}^{0}(\frac{b}{a_1}x+b)\,dx+\int_{0}^{a_2}(-\frac{b}{a_2}x+b)\,dx=\left[\frac{b}{2a_1}x^2+bx\right]_{-a_1}^{0}+\left[-\frac{b}{2a_2}x^2+bx\right]_{0}^{a_2}$$
$$=-(\frac{b}{2a_1}a_1^2-a_1b)+(-\frac{b}{2a_2}a_2^2+a_2b)$$
$$=-\frac{a_1b}{2}+a_1b-\frac{a_2b}{2}+a_2b$$
$$=\frac{a_1+a_2}{2}b$$
$$=\frac{1}{2}ab$$

これは確かによく知る図 3. 3 の三角形の面積になっている。

②　$y=\cos x$ について、区間 $[0,x]$ での積分を考える。
まず、区間 $[0,x]$ を n 等分割して

$$0<\frac{x}{n}<\frac{2x}{n}<\cdots\cdots<\frac{(n-1)x}{n}<\frac{n}{n}x=x$$

この分点でのリーマン和を考える。

$$S_n=\cos\frac{1}{n}x\times\frac{1}{n}x+\cos\frac{2}{n}\times\frac{1}{n}x+\ \cdots\cdots\ +\cos\frac{n}{n}x\times\frac{1}{n}x$$
$$=(\cos\frac{1}{n}x+\cos\frac{2}{n}x+\ \cdots\cdots\ +\cos\frac{n}{n}x)\times\frac{1}{n}x$$

ここで良く知られた公式、

$$\cos\theta+\cos 2\theta+\ \cdots\cdots\ +\cos n\theta=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta-\sin\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

を用いるのであるが、念のためこれを証明しておこう。

$$M=\cos\theta+\cos 2\theta+\ \cdots\cdots\ +\cos n\theta$$

とおくと、両辺 $\times\sin\dfrac{\theta}{2}$ として、公式

$$\frac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right\}=\cos\alpha\sin\beta$$

より

$$M\times\sin\frac{\theta}{2}=\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}+\cos 2\theta\sin\frac{\theta}{2}+\ \cdots\cdots\ +\cos n\theta\sin\frac{\theta}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(\sin\frac{3}{2}\theta-\sin\frac{\theta}{2})+(\sin\frac{5}{2}\theta-\sin\frac{3}{2}\theta)+\ \cdots\cdots\ +(\sin\frac{2n+1}{2}\theta-\sin\frac{2n-1}{2}\theta)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\frac{2n+1}{2}\theta-\sin\frac{1}{2}\theta)$$

よって

$$M=\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta-\sin\frac{1}{2}\theta}{2\sin\frac{1}{2}\theta}$$

これで証明できた。これをS_nの式へ代入して

$$S_n=\frac{\frac{1}{2n}x\cdot(\sin\frac{2n+1}{2n}x-\sin\frac{1}{2n}x)}{\sin\frac{x}{2n}}$$

$$=\frac{\sin\frac{2n+1}{2n}x-\sin\frac{1}{2n}x}{\frac{\sin\frac{1}{2n}x}{\frac{1}{2n}x}}$$

よって$n\to\infty$ のとき、$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ であるから

$$S_n\to\sin x\quad(n\to\infty)$$

これは上の（2.4）を表すから、いいかえると

$$\int_0^x\cos\theta d\theta=\sin x$$

となり、同時に（3.2）もこの場合なりたつことが確かめられた。

上の議論は面積という観点から$f(x)>0$ としたが、議論をよくみればわかるように、特に積分可能という視点からみるとこの仮定は使われていない。だからこの仮定は積分可能に関しては不要である。