## ５． 解決にはどのような考えがあるか。

上に述べたような問題点が生じる原因はどこにあるかを考えるとき、やはりＲ積分の定義のどこかを改良しなければならないであろう。そのときさしあたり考えられるのは区間の分割を改良するしかないように思える。実際それは例[4.2]のディリクレ関数のような場合をみるとわかるように、一般な点集合上の積分を考えるとき、この集合に対する（区間の長さに相当する）何らかの量を定義する必要があることに気がつく。
それが集合に対する測度である。１９世紀後半から２０世紀にかけて多くの数学者がそれぞれの測度論を展開したが、１９０２年にフランスのE. Lebesgueが発表した測度（いわゆるルベーグ測度）とそれにもとずく積分論（ルベーグ積分）のアイディアがもっとも有用であったことから、今日彼の名で呼ばれるルベーグ積分（以後、Ｌ積分と表す）が用いられるようになった。その特長を要約すると以下の通りである。
（１）$[a,b]$ でＲ積分可能ならば、Ｌ積分も可能であって、両者は等しい。

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)dx=(\mathrm{L})\int_a^b f(x)dx$$

（２）関数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ は$[a,b]$ でＲ積分可能で、$[a,b]$ の各点$x$ で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$$

とする。このとき極限関数 $f(x)$ が有界であっても、$f(x)$ がＲ積分可能とは限らない。のみならず、

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

と限らない。

しかしこれがルベーグ積分となると可能である。正確には以下の通りである。
関数 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots$ は$[a,b]$ でＬ積分可能で、$[a,b]$ の各点 $x$ で

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x) \qquad \text{（各点収束）}$$

とする。このとき，関数列 $f_n(x)$ が一様有界ならば、すなわち

（＊） $$\left|f_n(x)\right|\le M \quad (a\le x\le b,\ n=1,2,\ \cdots)$$

となる正定数 $M$ があれば、$f(x)$ もまたＬ積分可能で

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx \qquad \text{（Ｌ積分で）}$$

が成り立つ。
実際には、これをもう少し緩やかな条件 (各点収束は、殆どいたるところという表現、そして（＊）は、あるＬ積分可能な関数$\varphi(x)$ が存在して、殆どいたるところ

$$\left|f_n(x)\right|\le\varphi(x)$$

ならば）に言い換えて、ルベーグの収束定理の名で利用されることが多い。

こうしたＬ積分が持つすべての利点を、(1)からただ単にこれはＬ積分であると宣言するだけで活用できることが最大のメリットといえる。