連立１次方程式と図形

金沢工業大学　基礎教育部

杉本 浩

ねらい

連立１次方程式は様々な分野に登場する．電気回路におけるキルヒホッフの法則の解法，構造力学における有限要素法，多様な信号処理などの工学系の問題に用いられるのみならず，生産計画や輸送計画における線形計画法のように，社会科学系の分野でも広く使われている．これらの専門分野では，変数の数が非常に多い連立方程式を扱うが，その解法の基礎は 2 変数か 3 変数の連立１次方程式の解法である．

そこで，この解説では x, y を変数とする２元連立１次方程式の復習とともに，もう一つ変数を増やした３元連立１次方程式をとりあげ，その解法（とくに「掃き出し法」）と解の図形における意味を考える．文字を用いて計算の法則，方程式の解法などを調べる「代数」と図形や空間の性質を調べる「幾何」の両面を考えていくことによって，連立１次方程式に対する理解を一層深めていこうというものである．

なお，本学の授業用の教科書（参考文献[1]）には，連立１次方程式の解法はかなり詳しく記述されているが，解の図形における意味は書かれていない．本稿は，その教科書で学習する学生が授業と併行して自習できるように，補充教材として書かれたものである．教員が読むことは直接の目的ではない．また，高校生諸君に必要な予備知識はベクトルの内積および行列の積である．

目次

1. 平面上の直線

xy 平面上の直線の式を復習しておく．

(a) 定点を通ってベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直な直線

平面上で定点 P_0 とベクトル $\boldsymbol{n}$ が与えられたとする（図 1.1）．P_0 を通って $\boldsymbol{n}$ に垂直な直線 g の式は以下のようにして決まる．まず，原点を O とし，P_0 の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}_0 = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ とする．直線 g 上に任意の

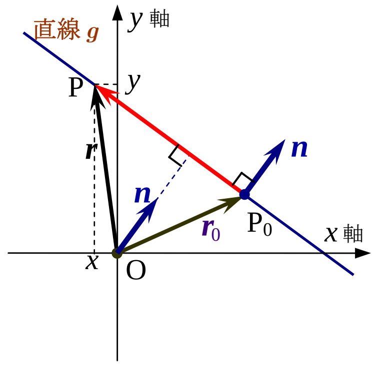


図 1.1

点 P をとり，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ としたとき，

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0 \qquad (1.1)$$

が成り立つ（垂直であるための条件）．ただし，・（ドット）はベクトルの**内積**を表す．また，$\boldsymbol{n}$ を直線 g の**法線ベクトル**という．ベクトルを成分表示 $\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0)$，$\boldsymbol{r}=(x,y)$，$\boldsymbol{n}=(a,b)$ で表すと(1.1)式は

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \qquad (1.2)$$

となる．さらに，$c=ax_0+by_0$ とおくと

$$ax+by=c \qquad (1.3)$$

となる．(1.1) ～ (1.3)式は直線 g を表す方程式である．

(b) 定点を通ってベクトル $\boldsymbol{d}$ に平行な直線

定点 P_0 とベクトル $\boldsymbol{d}$ が与えられたとする（図 1.2, 図 1.3)）．P_0 を通って $\boldsymbol{d}$ に**平行**な直線 g の式は以下のようにして決まる．

まず，前項と同様に $\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ とする．直線 g 上に任意の点 P をとり，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ としたとき，$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}}$ と $\boldsymbol{d}$ は同じ方向であるから

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+t\boldsymbol{d} \qquad (1.4)$$

となる実数 t が存在する．$\boldsymbol{d}$ は直線の方向を決めるベクトル（**方向ベクトル**という）である．なお，t はすべての実数の範囲で変化し，値を与えると直線 g 上の点が定まる（t を**媒介変数**またはパラメータという）．$\boldsymbol{r}=(x,y)$，$\boldsymbol{r}_0=(x_0,y_0)$，$\boldsymbol{d}=(l,m)$ と成分で表すと，(1.4)式は

$$x=x_0+tl\,,\qquad y=y_0+tm \qquad (1.5)$$

と，2 つの式になる．

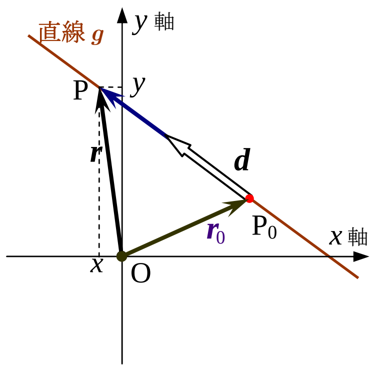


図 1.2

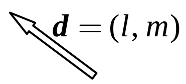


図 1.3

2. 空間内の平面と直線

xyz 空間内の平面の式を前項と同様の順序で導く（図 2.1）．

(a) 定点を通ってベクトル $\boldsymbol{n}$ に垂直な平面

定点 P_0 を通ってベクトル $\boldsymbol{n}$ に**垂直**な平面 σ 上に点 P をとり，$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ としたとき，やはり

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0 \qquad (2.1)$$

が成り立つ．ただし，ここでは $\boldsymbol{r}_0=\overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{r}$ は 3 次元の空間ベクトルであり，点 P は平

面 σ 上の任意の点である．

成分表示 $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$，$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$\boldsymbol{n} = (a, b, c)$ で表すと(2.1)式は

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \qquad (2.2)$$

となる．さらに，$d = ax_0 + by_0 + cz_0$ とおくと

$$ax + by + cz = d \qquad (2.3)$$

となる．(2.1)〜(2.3)式はいずれも平面 σ を表す方程式である．

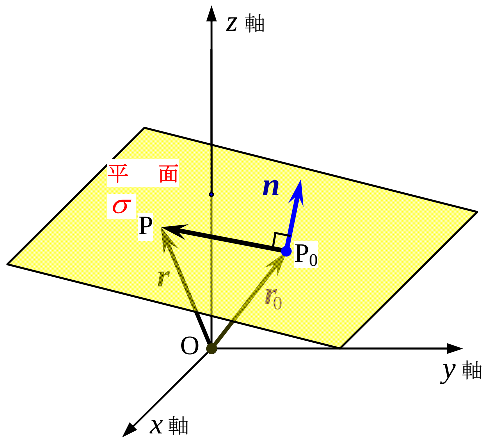


図 2.1

注１： $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ の場合，$ax + by + cz = d$ は，xyz 空間において，$\left(\frac{d}{a}, 0, 0\right)$，$\left(0, \frac{d}{b}, 0\right)$，$\left(0, 0, \frac{d}{c}\right)$ の 3 点を含む平面を表す；3 点を指定すると，それらを含む平面は一通りに決まる．a, b, c のうち，１つが 0 の場合，たとえば $by + cz = d$ は $x =$ 任意 で，yz 平面に垂直な平面，また，２つが 0 の場合，たとえば $cz = d$ は $x =$ 任意，$y =$ 任意 で，z 軸に垂直な平面を表す．

注２：図 2.1 や今後説明のために使用する図では，わかりやすくするため，有限の拡がりをもった平面を描く．しかし，(2.1)〜(2.3)式で表される平面は無限の拡がりをもっている．

(b) 定点を始点とする２つのベクトル $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$ によってつくられる平面

定点 P_0 および方向の異なる２つのベクトル $\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$ が与えられたとする（図 2.2）．P_0 を始点として，$\boldsymbol{d}_1$, $\boldsymbol{d}_2$ をとると，その 1 次結合によって 1 つの平面ができる．この平面 σ を表す式は以下のようにして決まる．

まず，前項と同様に $\boldsymbol{r}_0 = \overrightarrow{\mathrm{OP}_0}$ とする．平面 σ 上に任意の点 P をとり，$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ としたとき，$\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$ は平面 σ 上にあるから $\boldsymbol{d}_1$ のスカラー倍と $\boldsymbol{d}_2$ のスカラー倍のベクトル和として表される．

$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = t_1\boldsymbol{d}_1 + t_2\boldsymbol{d}_2$ （ただし，t_1, t_2 は実数），すなわち

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t_1\boldsymbol{d}_1 + t_2\boldsymbol{d}_2 \qquad (2.4)$$

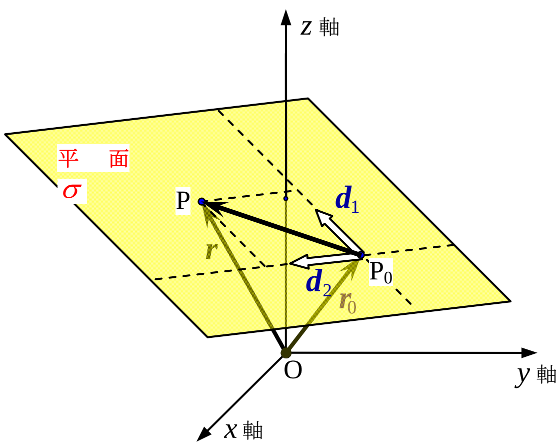


図 2.2

なお，t_1, t_2 はすべての実数の範囲で変化し，値を与えると平面 σ 上の点 P が定まる．$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$，$\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$，$\boldsymbol{d}_1 = (l_1, m_1, n_1)$，$\boldsymbol{d}_2 = (l_2, m_2, n_2)$ と成分で表すと，(2.4)式は

$$x = x_0 + t_1 l_1 + t_2 l_2, \qquad y = y_0 + t_1 m_1 + t_2 m_2, \qquad z = z_0 + t_1 n_1 + t_2 n_2 \qquad (2.5)$$

と，3 つの式になる．点 P は平面 σ 上の任意の点であり，(2.5)式は平面 σ を表す方程式である．

(c) 空間内の直線

平面上の直線の場合と同様にして， xyz 空間における点 P の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 + t\boldsymbol{d} \qquad (2.6)$$

と表される（図 2.3）．ただし， $\boldsymbol{r}_0$ は定点 P_0 の位置ベクトル， $\boldsymbol{d}$ は直線の方向ベクトル， t は媒介変数である． $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$， $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$， $\boldsymbol{d} = (l, m, n)$ と成分で表すと，(2.6)式は

$$x = x_0 + tl\,, \qquad y = y_0 + tm\,, \qquad z = z_0 + tn \qquad (2.7)$$

と３つの式になる．

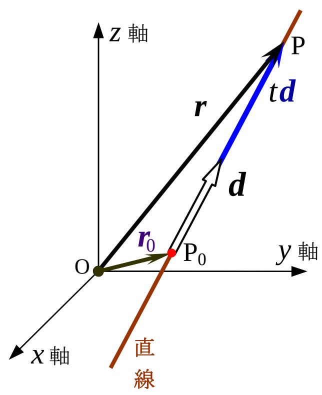


図 2.3

3. 連立１次方程式の解法

本章では，主として x, y を変数とする２元連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

と，もう一つ変数（z）を増やした３元連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

をとりあげ，その解法（とくに「掃き出し法」）を考える．

(1) 消去法

連立１次方程式の一般的な解法として，**消去法**がある．消去法とは，

（Ⅰ）　１つの方程式に０でない数をかける．
（Ⅱ）　１つの方程式にある数をかけて，他の方程式に加える．
（Ⅲ）　２つの方程式を入れ替える．

の３つの演算をそれぞれ何回か行うことによって変数を消去し，簡単な方程式に変形して解を求める方法である．このとき，変数の間の関係を変えないように，方程式の左右両辺に同じ演算を行わなければならない．

例題 3. 1

次の簡単な例題を消去法で解いてみよう．連立１次方程式

$$\begin{cases} 3x-2y=9 \\ x+y=8 \end{cases} \tag{3.1}$$

が与えられたとする．解きやすいように，２つの方程式を入れ替えると

$$\begin{cases} x+y=8 & \cdots① \\ 3x-2y=9 & \cdots② \end{cases} \tag{3.2}$$

となる．以下，消去法に従って，解いていくと以下のようになる．

$$②式+①式\times(-3) \qquad \begin{cases} x+y=8 & \cdots① \\ -5y=-15 & \cdots③ \end{cases} \tag{3.3}$$

$$③式\times\left(-\frac{1}{5}\right) \qquad \begin{cases} x+y=8 & \cdots① \\ y=3 & \cdots④ \end{cases} \tag{3.4}$$

$$①式+④式\times(-1) \qquad \begin{cases} x=5 & \cdots⑤ \\ y=3 & \cdots④ \end{cases} \tag{3.5}$$

この例題の，(3.5)式の形に至るまで（すなわち，解がそれぞれ求まるまで）３つの演算を行う解法を Gauss-Jordan の消去法という．消去法は，変数の数が増えても有効な解法である．

ところで，連立１次方程式(3.1)を行列の式で表すと

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$$

である．この式で x, y の係数部分だけを行列で表した $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を**係数行列**といい，それに右辺を加えた $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 9 \\ 1 & 1 & 8 \end{array}\right)$ を**拡大係数行列**という．ただし，係数部分と右辺の数を区別するために，縦の線を入れておく．ここで，(3.1)式から(3.5)式までの変形をみると，拡大係数行列が３つの演算によって変化しているだけである．したがって，連立１次方程式(3.1)を解くには，x, y および $=$ を省略して，対応する拡大係数行列をつくり，行に対して上記３つの演算と同じ操作を行って，係数部分が‘単位行列’，すなわち $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ になるまで変形していけばよいことがわかる．この最後の形は，(3.1)式の解が， $x=5,\quad y=3$ であることを示している．

注： $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$ は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ を意味している．

(2) 掃き出し法

前項で，拡大係数行列の行の変形によって，連立１次方程式を解くことができることがわかった（内容的には Gauss-Jordan の消去法）．変形後の連立方程式は最初に与えられた連立方程式と同値でなければならない．この解法で行うべき操作は，拡大係数行列に対して次のⅠ，Ⅱ，Ⅲを行うことである．これらを**行基本変形**という．

行基本変形	
	Ⅰ　１つの行に0でない数をかける．
	Ⅱ　１つの行にある数をかけて，他の方程式に加える．
	Ⅲ　２つの行を入れ替える．

（ただし，4.（3)で説明するように，列の入れ替えを行うことがある）
実際に，行基本変形によって拡大係数行列を係数部分が‘単位行列’になるまで変形するときは，行列の記号(　)をはずして表をつくると見やすい．本解説では，この表を**掃き出し表**ということにする．なお，一般に，行基本変形による解法を**掃き出し法**という．

例題 3.2

練習のために，**例題 3.1** $\begin{cases} 3x-2y=9 \\ x+y=8 \end{cases}$ を，あらためて掃き出し法で解いてみよう．

掃き出し表

	拡大係数行列	
	x　y	定数
①	3　−2 1　1	9 8
②	1　1 3　−2	8 9
③	1　1 0　−5	8 −15
④	1　1 0　1	8 3
⑤	1　0 0　1	5 3

操作の内容

操作 ((1)は第１行を表す)	行基本 変形	対応する式 （消去法）
		$3x-2y=9$　(1) $x+y=8$　(2)
①の(1)↔(2)	Ⅲ	$x+y=8$　(1) $3x-2y=9$　(2)
②の $(2)+(1)\times(-3)$	Ⅱ	$x+y=8$　(1) $-5y=-15$　(2)
③の$(2)\times\left(-\frac{1}{5}\right)$	Ⅰ	$x+y=8$　(1) $y=3$　(2)
④の $(1)+(2)\times(-1)$	Ⅱ	$x=5$　(1) $y=3$　(2)

答　解は　$x=5,\quad y=3$　　（なお，慣れてきたら，掃き出し表のみ書けばよい）

例題 3.3　今度は次の３元連立１次方程式を解いてみよう．

$$\begin{cases} x-y+z=-2 \\ 3x-5y+7z=0 \\ 2x+3y-z=-5 \end{cases}$$

掃き出し表

	拡 大 係 数 行 列	
	x　y　z	定数項
①	1　−1　1 3　−5　7 2　3　−1	−2 0 −5

操作の内容

操作 ((1)は第１行を表す)	行基本 変形	対応する式 （消去法）
		$x-y+z=-2$　(1) $3x-5y+7z=0$　(2) $2x+3y-z=-5$　(3)

②	$1\ \ -1\ \ 1$ $0\ \ -2\ \ 4$ $0\ \ 5\ \ -3$	-2 6 -1	①の $(2)+(1)\times(-3)$ ①の $(3)+(1)\times(-2)$	Ⅱ Ⅱ	$x-y+z=-2$ (1) $-2y+4z=6$ (2) $5y-3z=-1$ (3)
③	$1\ \ -1\ \ 1$ $0\ \ 1\ \ -2$ $0\ \ 5\ \ -3$	-2 -3 -1	②の $(2)\times(-\frac{1}{2})$	Ⅰ	$x-y+z=-2$ (1) $y-2z=-3$ (2) $5y-3z=-1$ (3)
④	$1\ \ 0\ \ -1$ $0\ \ 1\ \ -2$ $0\ \ 0\ \ 7$	-5 -3 14	③の $(1)+(2)$ ③の $(3)+(2)\times(-5)$	Ⅱ Ⅱ	$x-z=-5$ (1) $y-2z=-3$ (2) $7z=14$ (3)
⑤	$1\ \ 0\ \ -1$ $0\ \ 1\ \ -2$ $0\ \ 0\ \ 1$	-5 -3 2	④の $(3)\times\frac{1}{7}$	Ⅰ	$x-z=-5$ (1) $y-2z=-3$ (2) $z=2$ (3)
ⓢ	$1\ \ 0\ \ 0$ $0\ \ 1\ \ 0$ $0\ \ 0\ \ 1$	-3 1 2	⑤の $(1)+(3)$ ⑤の $(2)+(3)\times 2$	Ⅱ Ⅱ	$x=-3$ $y=1$ $z=2$

答　解は　$x=-3,\quad y=1,\quad z=2$

(「掃き出し法」の由来：　表の①から②への変形，すなわち，$(1,1)$ 成分をもとにして $(2,1)$ 成分および $(3,1)$ 成分を 0 にする変形を「$(1,1)$ 成分を要(かなめ)として，第 1 列を**掃き出す**」という)

変数の数が増えても解法は同じであり，掃き出し表のⓢの形になるまで変形していく．ただし，途中で係数行列の対角成分が 0 になってしまうことがある．その場合は行基本変形のⅢ（行の入れ替え）を行い，続行する．それでも対角成分の一部が 0 になる場合については 4．(3)で述べる．

問 3.1　次の連立 1 次方程式を掃き出し法で解け．

(1) $\begin{cases} 3x+4y-z=8 \\ x-7y+3z=1 \\ -x+y+9z=-7 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+x_4=-3 \\ x_1-x_2+2x_3+2x_4=-4 \\ x_1+3x_2-2x_3-2x_4=0 \\ 3x_1-x_3-2x_4=-7 \end{cases}$

4. 解の分類と図形

(1)　２元連立１次方程式の解と図形

次の例題を考えてみよう．

例題 4. 1　次の連立１次方程式を掃き出し法で解け．

(a) $\begin{cases} x\ -2y=2 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$　　　　(b) $\begin{cases} x\ -2y=2 \\ 2x-4y=0 \end{cases}$

(a) の解説と解答

右の掃き出し表のⓈは**例題 3. 1** のような‘単位行列’にはできない．その第２行は

$0x+0y=0$

を表している．この式はすべての x, y によって満たされる．この式だけからは，x, y は任意の数になるので，第１行の $x-2y=2$ から解は特定され得る．未知数が２つで式は１つであるから，$y=c$（任意の数）とおける．すると，$x=2y+2=2c+2$ となる．

掃き出し表 (a)

	拡大係数行列			操作（計算）
	x	y	定数	(1)は第１行を表す
①	1	−2	2	(1)
	2	−4	4	(2)
ⓢ	1	−2	2	
	0	0	0	①の(2)＋(1)×(−2)

答　c を任意の数として，解は $\begin{cases} x=2c+2 \\ y=\ c \end{cases}$

この場合，解は無数にある．

なお，この解は，列ベクトルで表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり，(1.4) または(1.5)式を列ベクトルで表した式になっている．すなわち，直線 $x-2y=2$ 上の任意の点を表す（図 4.1）．

（$2x-4y=4$ は $x-2y=2$ と同一の直線）

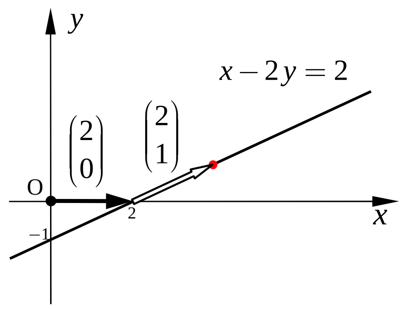


図 4.1

(b) の解答

右の掃き出し表のⓈは(a)と同様に‘単位行列’にできないが，右の定数が異なる．その第２行は

$0x+0y=-4$

を表すが，この式を満たす x, y は存在しない．

答　**解はない．**

掃き出し表 (b)

	拡大係数行列			操作（計算）
	x	y	定数	(1)は第１行を表す
①	1	−2	2	(1)
	2	−4	0	(2)
ⓢ	1	−2	2	
	0	0	−4	①の(2)＋(1)×(−2)

ところで，**例題 3. 2**，**例題 4. 1**(a), (b) の解の図形における意味はそれぞれ異なっており，その違いは掃き出し表の最後の表ⓢの形に対応している（次表および図 4.2 参照）.

	掃き出し表の最後の表Ⓢ	解および図形としての意味
例題 3. 2	$\left.\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right.$	**ただ一組の解**. 2 つの直線が一点で交わる. 解は，その交点の座標　$x=5$，　$y=3$.
例題 4. 1 (a)	$\left.\begin{array}{cc\|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$	**無数の解**.　2 つの直線が重なる. $x=2c+2$，　$y=c$　（c は任意定数） 解は，その直線上の任意の点の座標,
例題 4. 1 (b)	$\left.\begin{array}{cc\|c} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{array}\right.$	**解はない** 2 つの直線が平行．交わらない

例題 3. 2　　**例題 4. 1**(a)　　**例題 4. 1**(b)

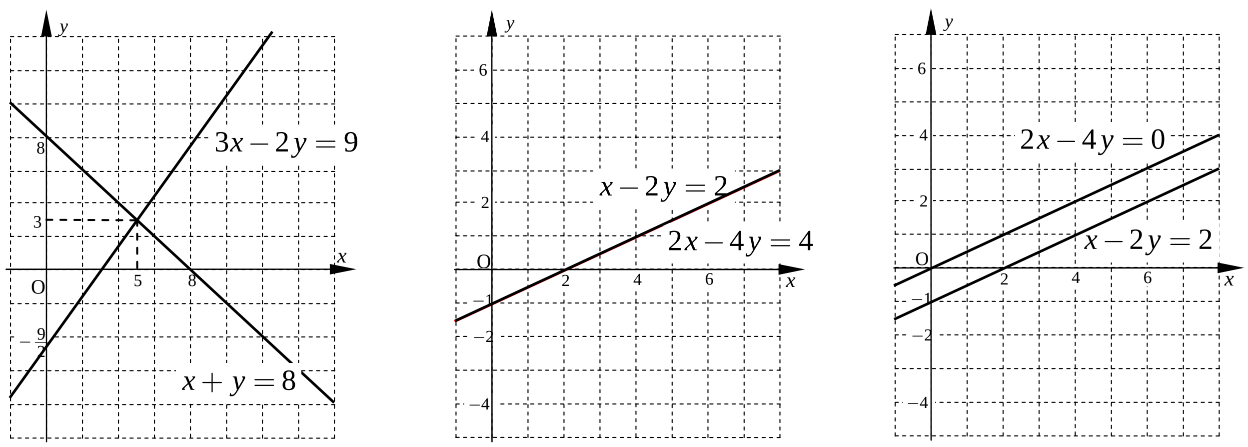


図 4.2

まとめとして，一般の 2 元連立 1 次方程式の解の分類を記述しておく.

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \ \cdots \text{直線}(1) \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \ \cdots \text{直線}(2) \end{cases} \tag{4.1}$$

が与えられたとき，解は次表によって分類される．ただし，$a_{12}{}'$ は行基本変形を行った最後の表Ⓢの y の係数で，$b_1{}', b_2{}'$ は表Ⓢの定数項である.

	掃き出し表の最後の表Ⓢの形	解および図形としての意味
(a)	$\left.\begin{array}{cc\|c} 1 & 0 & b_1{}' \\ 0 & 1 & b_2{}' \end{array}\right.$	**ただ一組の解**. 2 つの直線が一点で交わる. 解は，その交点の座標　$x=b_1{}'$，　$y=b_2{}'$
(b)	$\left.\begin{array}{cc\|c} 1 & a_{12}{}' & b_1{}' \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$	**無数の解**.　2 つの直線が重なる. $x=b_1{}'-a_{12}{}'c$，　$y=c$　（c は任意定数） 解は，その直線上の任意の点の座標,
(c)	$\left.\begin{array}{cc\|c} 1 & a_{12}{}' & b_1{}' \\ 0 & 0 & b_2{}' \end{array}\right.$	（$b_2{}' \neq 0$） **解はない**.　2 つの直線が平行．交わらない

(2)　３元連立１次方程式の解と図形

３元連立１次方程式の解の分類は，２元連立１次方程式の場合と類似しているが，変数が１つ増えていることに注意しなければならない．

まず，掃き出し表の最後の係数行列が**単位行列**になる場合を考えておこう．**例題 3.3 の**

$$\begin{cases} x-y+z=-2 \\ 3x-5y+7z=0 \\ 2x+3y-z=-5 \end{cases}$$

ⓢ	1	0	0	−3
	0	1	0	1
	0	0	1	2

の場合，$x=-3,\quad y=1,\quad z=2$ という**ただ一組の解**を得た．これは，掃き出し表の最後ⓢの係数行列の部分が‘単位行列’になったことによる．

図形：(2. (2) **の**(2.3)式で説明したように，問題の３つの式はそれぞれ空間内の平面を表す．したがって，３元連立１次方程式を解くことは，平面の交わりを求めることになっている．この問題では，３つの平面のうち２つの平面はそれぞれ交線をもち，その３つの交線が一点 P$(-3,\ 1,\ 2)$ で交わっている（図 4.3 は概念図）．

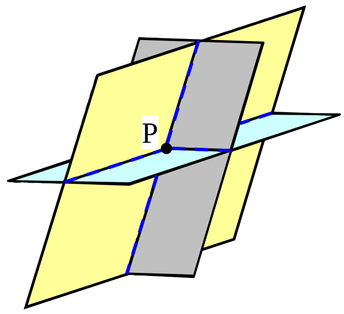


図 4.3

では，‘単位行列’にできない場合の解はどうなるのか．例題で説明しておこう．

例題 4.2　次の連立１次方程式を掃き出し法で解け．

$$\begin{cases} 3x-y-12z=4 \\ \quad\ \ y-3z=-1 \\ 3x-5y\qquad\ =8 \end{cases}$$

掃き出し表

	拡大係数行列				操作（計算）
	x	y	z	定数	
①	3 0 3	−1 1 −5	−12 −3 0	4 −1 8	
②	1 0 3	$-\frac{1}{3}$ 1 −5	−4 −3 0	$\frac{4}{3}$ −1 8	①の(1)×$\frac{1}{3}$
③	1 0 0	$-\frac{1}{3}$ 1 −4	−4 −3 12	$\frac{4}{3}$ −1 4	②の(3)＋(1)×(−3)
ⓢ	1 0 0	0 1 0	−5 −3 0	1 −1 0	③の(1)＋(2)×$\frac{1}{3}$ ③の(3)＋(2)×4

解説と解答

掃き出し表最後のⓈの第３行は

$$0x+0y+0z=0$$

となる．この式はすべての x, y, z によって満たされる．この式だけからは，x, y, z は任意の数になるので，第１行の $x-5z=1$ と第２行の $y-3z=-1$ から解は特定され得る．変数が３つで式は２つであるから，$z=c$（任意の数）とおける．すると，

$x=5z+1=5c+1$，

$y=3z-1=3c-1$

となる．

答　cを任意の数として，

$$\text{解は}\begin{cases} x=5c+1 \\ y=3c-1 \\ z=c \end{cases}$$

である．この場合，**解は無数にある**．なお，この解は，列ベクトルで表すと

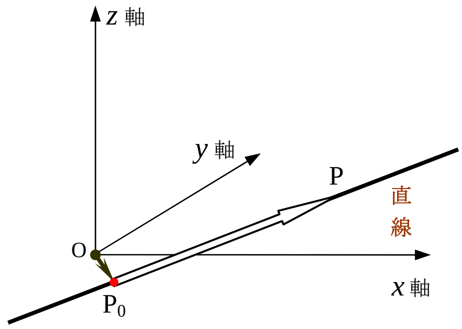
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり，(2.4) または(2.6)式を列ベクトルで表した式になっている．すなわち，点 $\mathrm{P_0}(1,\ -1,\ 0)$ を通って，

$$\overrightarrow{\mathrm{P_0P}}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を方向ベクトルとする直線上の任意の点の座標が解である（図 4.4）．

図形：この問題の解を表す直線は３つの平面の共通の交線である（図 4.5）．



$$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{\mathrm{P_0P}}=\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

図 4.4

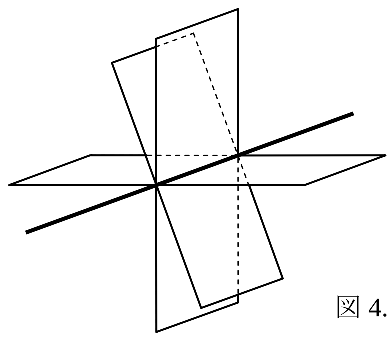


図 4.5

例題 4. 3　次の連立１次方程式を掃き出し法で解け．

$$\begin{cases} 3x-y-12z=4 \\ \qquad y-3z=-1 \\ 3x-5y\qquad=6 \end{cases}$$

解答

掃き出し表の最後のⓈは例題 4.2 と同様に‘単位行列’にできないが，右の定数が異なる．その第３行は

$$0x+0y+0z=-2$$

を表すが，この式を満たす x, y, z は存在しない．

答　**解はない**．

	拡大係数行列			
	x	y	z	定数
①	3	−1	−12	4
	0	1	−3	−1
	3	−5	0	6
②	1	$-\frac{1}{3}$	−4	$\frac{4}{3}$
	0	1	−3	−1
	3	−5	0	6
③	1	$-\frac{1}{3}$	−4	$\frac{4}{3}$
	0	1	−3	−1
	0	−4	12	2
Ⓢ	1	0	−5	1
	0	1	−3	−1
	0	0	0	−2

図形：この場合，３番目の平面 $3x-5y=6$ は前の例題の $3x-5y=8$ を平行移動したものである．したがって，問題の３つの平面の関係は図 4.6 のようになる．すなわち，２つの平面はそれぞれ交線をもつが，それら３つの交線が平行になっている．

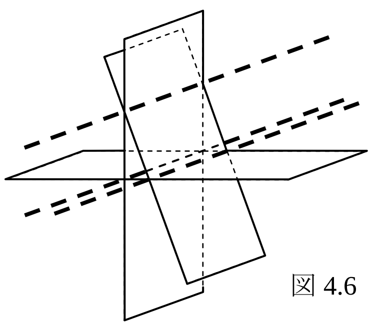


図 4.6

そのため，３つの平面の共通の交わりはない.

例題 4.4　次の連立１次方程式を掃き出し法で解け.

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = 4 \\ 2x - 6y - 4z = 8 \\ 5x - 15y - 10z = 20 \end{cases}$$

掃き出し表

	拡大係数行列				操作（計算）
	x	y	z	定数	
①	1 2 5	−3 −6 −15	−2 −4 −10	4 8 20	
Ⓢ	1 0 0	−3 0 0	−2 0 0	4 0 0	①の(2)＋(1)×(−2) ①の(2)＋(1)×(−5)

解説と解答

掃き出し表は右のようになり，最後のⓈの第２，３行はともに

$$0x + 0y + 0z = 0$$

となる．例題 4.2 と同じく，この式だけからは，x, y, z は任意の数になるので，第１行の $x - 3y - 2z = 4$ からのみ解は特定され得る．未知数が３つで式は１つであるから，$y = c_1$，$z = c_2$ と２つの任意の数をおける．すると，$x = 3y + 2z + 4 = 3c_1 + 2c_2 + 4$ となる.

答　c_1, c_2 を任意の数として，

$$\text{解は} \begin{cases} x = 3c_1 + 2c_2 + 4 \\ y = c_1 \\ z = c_2 \end{cases}$$

である．この場合，**解は無数**にある.

なお，この解は，列ベクトルで表すと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

であり，点 $P_0(4,\ 0,\ 0)$ を始点とする２つのベクトル

$$\overrightarrow{P_0P_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{P_0P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

によってつくられる**平面**上の任意の点の座標が解である（図 4.7，および(2.5)式参照）.

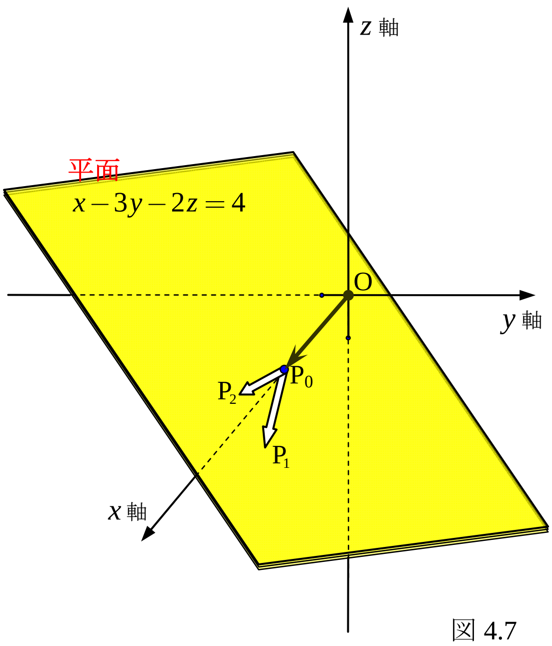


図 4.7

図形：　この場合，問題からすぐわかるように，３つの平面がいずれも $x - 3y - 2z = 4$ である．つまり，３つの平面が重なっている.

例題 4.5　次の連立１次方程式を掃き出し法で解け．

$$\begin{cases} x - 3y - 2z = 4 \\ 2x - 6y - 4z = 0 \\ 5x - 15y - 10z = 5 \end{cases}$$

掃き出し表

	拡大係数行列			
	x	y	z	定数
①	1	−3	−2	4
	2	−6	−4	0
	5	−15	−10	5
Ⓢ	1	−3	−2	4
	0	0	0	−8
	0	0	0	−15

解答

掃き出し表は右のようになり，最後のⓈの第２行は

$$0x + 0y + 0z = -8$$

となるが，この式を満たす x, y, z は存在しない．

答　**解はない．**

（ $0x + 0y + 0z = -15$ を満たす x, y, z が存在しないことを，解がないことの理由として記述してよいが，一つの式だけでよい）

図形： この場合，問題の３つの平面は $x - 3y - 2z = 4$，　$x - 3y - 2z = 0$，$x - 3y - 2z = 1$ であるから，互いに平行である（(2.3)式において，d だけが異なる．また，図 4.8 参照）．

したがって，平面どうしの交わりはない．なお，右辺の定数の値によっては，２つが重なる場合もあるが，その場合も，解はない（図 4.9 の(e-2)参照）．

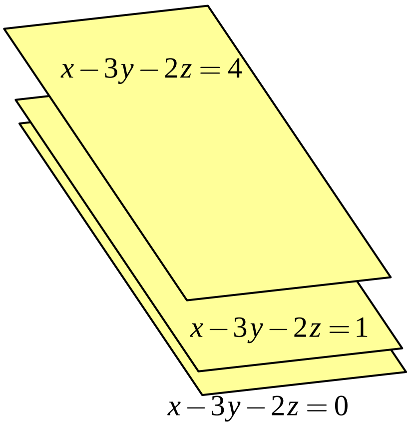


図 4.8

以上のまとめとして，一般の３元連立１次方程式の解の分類を記述しておく．連立１次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 & \cdots \text{平面}(1) \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 & \cdots \text{平面}(2) \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 & \cdots \text{平面}(3) \end{cases} \tag{4.2}$$

が与えられたとき，解は xyz 空間における「**3 つの平面の交わり**の座標」になっている．２元連立１次方程式の場合と同じように，行基本変形と列の入れ替えを行った最後の掃き出し表Ⓢの形によって，解は分類される．結果は次表のとおりである．ただし，$a_{12}{}'$ は行基本変形を行った最後の表Ⓢの y の係数，$a_{13}{}', a_{23}{}'$ は z の係数で，$b_1{}', b_2{}', b_3{}'$ は表Ⓢの定数項である．なお，それぞれの解に対応する図が図 4.9 の(a)～(e-2) に示されている．

分　類　表

	掃き出し表の最後の形	解および図形としての意味
(a)	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & 0 & b_1' \\ 0 & 1 & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & 1 & b_3' \end{array}$	**ただ一組の解**. 2 つの平面はそれぞれ交線をもち，それら 3 つの交線が一点で交わる． 解はその交点の座標　$x=b_1'$，　$y=b_2'$，　$z=b_3'$
(b)	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & a_{13}' & b_1' \\ 0 & 1 & a_{23}' & b_2' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	**無数の解**. 3 つの平面が 1 つの直線で交わる．または，2 つの平面が重なり，もう 1 つの平面と直線で交わる．解は，その直線上の任意の点の座標 $x=-a_{13}'c+b_1'$，　$y=-a_{23}'c+b_2'$，　$z=c$　（c は任意定数）
(c)	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & 0 & a_{13}' & b' \\ 0 & 1 & a_{23}' & b_2' \\ 0 & 0 & 0 & b_3' \neq 0 \end{array}$	**解はない** 2 つの平面がそれぞれ交線をもつが，それら 3 つの交線が平行になる． または，2 つの平面が平行で，それらにもう 1 つの平面が交わる．
(d)	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & a_{12}' & a_{13}' & b_1' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$	**無数の解**．3 つの平面が重なる． 解はその平面上の任意の点の座標 $x=-a_{12}'c_1-a_{13}'c_2+b_1'$，　$y=c_1$，　$z=c_2$　（c_1, c_2 は任意定数）
(e)	$\begin{array}{ccc\|c} 1 & a_{12}' & a_{13}' & b_1' \\ 0 & 0 & 0 & b_2' \\ 0 & 0 & 0 & b_3' \end{array}$	（ただし，$b_2'=0,\ b_3'=0$　以外の場合） **解はない** 3 つの平面が互いに平行．または，2 つの平面が重なり，それらにもう 1 つの平面が平行．

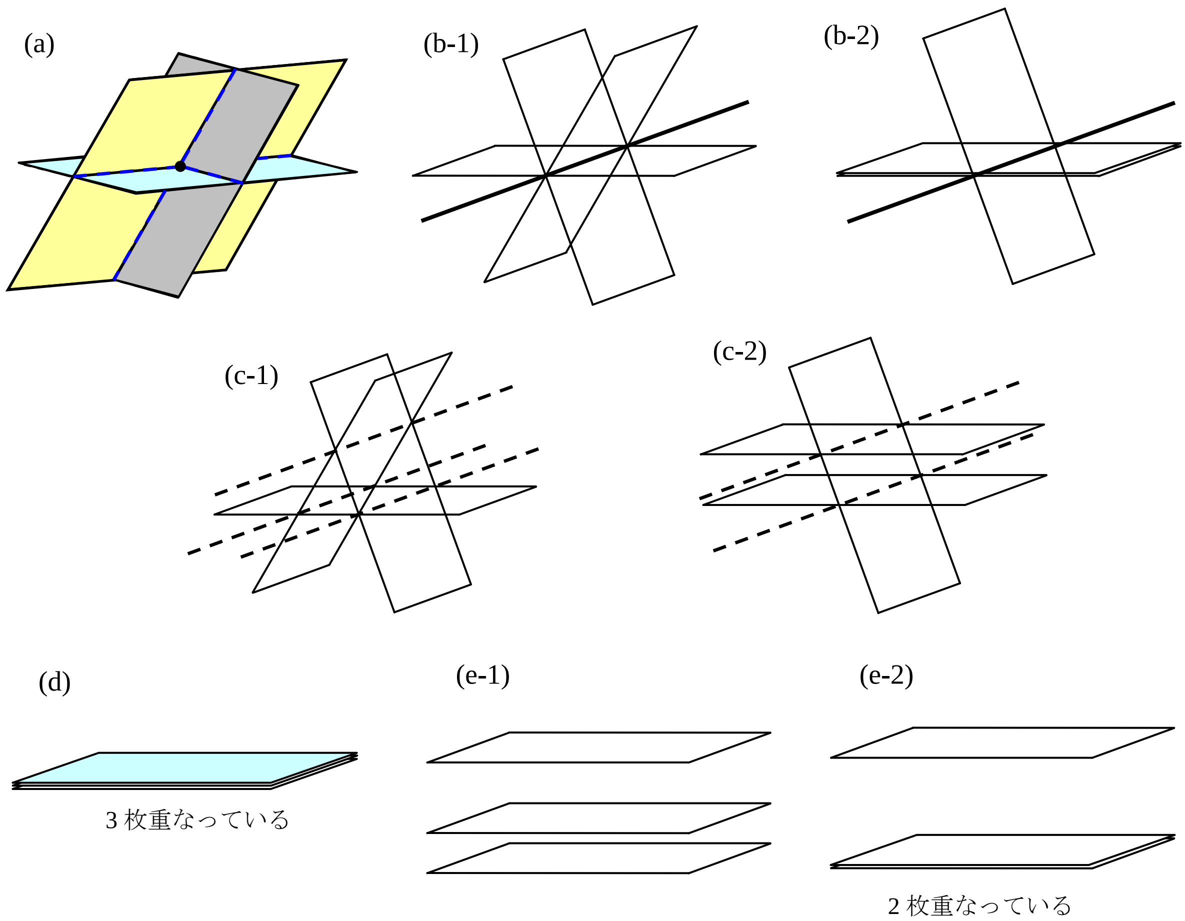


図 4.9

問 4.1　**例題 3.3，問 3.1**(a)の連立方程式は，それぞれ図 4.9 のどの図に対応するか答えよ．

問 4.2　次の連立 1 次方程式を掃き出し法で解いて，図 4.9 のどの図に対応するか答えよ．

(1) $\begin{cases} x \quad\quad +2z = 6 \\ 2x+y-z=-5 \\ 3x+y+2z=5 \end{cases}$　(2) $\begin{cases} 2x+y+z=-5 \\ x \quad\quad -3z=10 \\ 3x+y-2z=5 \end{cases}$　(3) $\begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ x \quad\quad -3z=4 \\ -2x+y-z=5 \end{cases}$

問 4.3　**例題 4.2** の第 1 式と第 2 式を変えないで，図 4.9 の(b-2) に対応する連立方程式をつくるためには，第 3 式をどのような式に変えればよいか．２通り答えよ．
また，その２通りについて，連立方程式を掃き出し法を用いて解け．

問 4.4　**例題 4.3** の第 1 式と第 2 式を変えないで，図 4.9 の(c-2) に対応する連立方程式をつくるためには，第 3 式をどのような式に変えればよいか．２通り答えよ．

問 4.5　**例題 4.4** の第 1 式を変えないで，図 4.9 の(e-2) に対応する連立方程式をつくるためには，第 2 式と第 3 式の右辺の値をどうすればよいか．２通り答えよ．

(3) 列の入れ替えを行う例題

この解説の最後に，掃き出し法の途中で列の入れ替えを行う例をあげておく．

例題 4.6　次の連立 1 次方程式を掃き出し法で解け．

$$\begin{cases} x-2y+z=3 & \cdots\text{平面(1)} \\ 2x-4y+3z=2 & \cdots\text{平面(2)} \end{cases}$$

解説と解答

変数の数より式の数が少ないが，等しい場合と同様に掃き出し表をつくっていく．表②の第２行で，y の係数$=0$，z の係数$\neq 0$ となる．そこで，係数行列の第２列と第３列を入れ替えると表③になり，掃き出し法を続行することができる．このとき，y と z が入れ替わっており，$z=-4$ が得られていることに注意しなければならない．

残りの変数が２つで式は１つであるから，$y=c$（任意の数）とおける．すると，表ⓢの第１行より $x=2y+7$ $=2c+7$ となる．

掃き出し表

	拡大係数行列				操作（計算）
	x	y	z	定数	
①	1 2	–2 –4	1 3	3 2	
②	1 0	–2 0	1 1	3 –4	①の(2)＋(1)×(–2)
＊	x	z	y		**列の入れ替え**
③	1 0	1 1	–2 0	3 –4	
ⓢ	1 0	0 1	–2 0	7 –4	③の(1)＋(2)×(–1)

表③の意味　$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

答　c を任意の数として，

解は $\begin{cases} x=2c+7 \\ y=c \\ z=-4 \end{cases}$　または，$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

この解は，２つの平面の交わり（直線）の上の任意の点を表している．

なお，「変数の数より式の数が一つ少ない」ことは，「もう１つ平面があるのだが，平面(1)，(2)のいずれかに重なっている」，すなわち，掃き出し表最後の⑤は右の拡大係数行列と同等であり，図 4.9 の(b-2)に相当すると解釈することができる．

1	0	−2	7
0	1	0	−4
0	0	0	0

注意 : 掃き出し表の②で止めてはいけない．第１式 $x-2y+z=3$ からはまだ何も消去されていない．

問 4.6　次の連立１次方程式を掃き出し法で解き，図 4.9 のどの図に対応するか答えよ．

$$\begin{cases} x-2y+z=3 \\ 2x-4y+3z=2 \\ 4x-8y+5z=8 \end{cases}$$

5. おわりに

この解説では掃き出し法によって連立１次方程式を解いた．その掃き出し法は，連立１次方程式を行列とベクトル（列ベクトル）の積で表せることから始まっているのであった．その一般論について少し触れておく．

たとえば，３元連立１次方程式（(4.2)式）は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \cdots (5.1)$$

と表される．係数行列を A，変数および右辺の定数をそれぞれまとめてベクトル $\boldsymbol{x}$ および $\boldsymbol{b}$ と表す，すなわち，

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \qquad \cdots (5.2)$$

とすると，(5.1)式は

$$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \qquad \cdots (5.3)$$

と書かれる．したがって，連立１次方程式(5.1)を解くことは，行列 A で表される１次変換によってベクトル $\boldsymbol{b}$ に移されるベクトル $\boldsymbol{x}$ を求めることである．

その結論は

(1) 逆行列 A^{-1} が存在するとき：
$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$

(1) 逆行列 A^{-1} が存在する場合（３次）

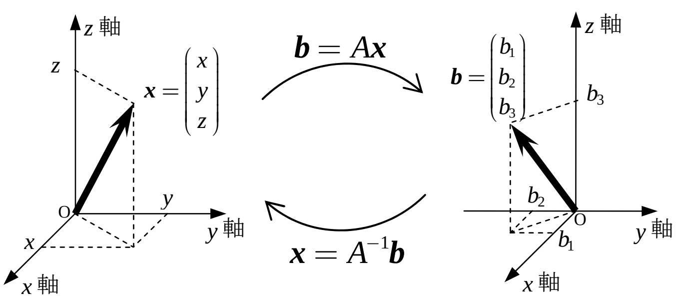


図 5.1

（ただ一組の解．図 5.1）

(2) 逆行列が存在しないとき：

(a) 無数に多くの解をもつ

または

(b) 解はない

である．

しかし，この結論のままでは，実際に A と $\boldsymbol{b}$ が数値で与えられたとき，解を求めにくい．たとえば(1) の場合，変数の数（式の数も）が増えたとき，逆行列 A^{-1} を求める計算が複雑になるが，さらにそれを $\boldsymbol{b}$ にかける計算もしなければならない[1]．

また，(2) の場合は，(a)と(b)の区別をどのようにして行うのか．(a)の場合の解（図 5.2）はどのような方法で求めるのか，などの問題が残る．

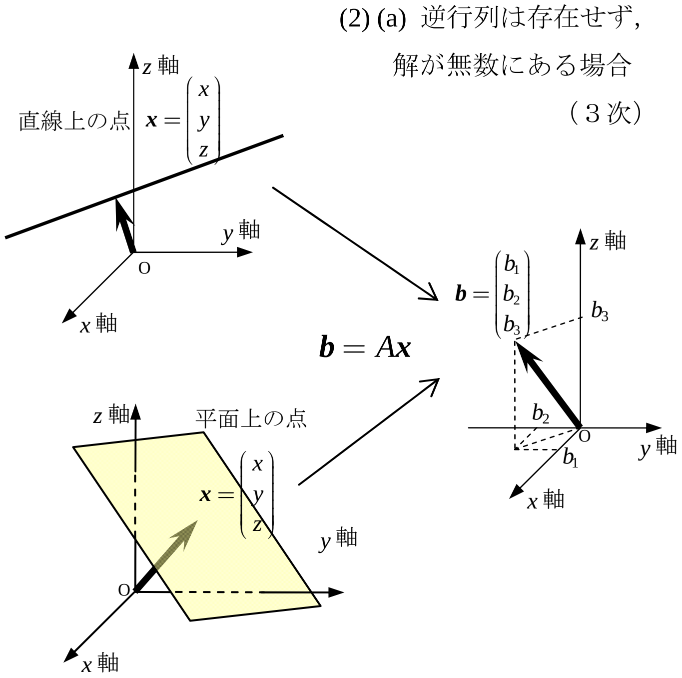


図 5.2

掃き出し法はこれらに応える連立 1 次方程式の実践的な解法である．拡大係数行列に対して一連の行基本変形を行っていくことによって[2]，(1)，(2)(a)，(b)の区別をつけ，解がある場合は，容易に求められる方法になっている（納得のいかない人は 3.，4. を再読してください）．(1)の場合でいえば，途中で A^{-1} を求めなくても掃き出し表の最後には解 $A^{-1}\boldsymbol{b}$ が得られている．(2)の場合には明確な分類が行え，無数の解をもつときはその解が得られる（それらは 15 頁の分類表にまとめられている）．

さらに，掃き出し法は変数の数が多い場合にも，変数の数より式の数が少ない場合にも同様に用いることができる（問 3.1(2)，例題 4.6）．また，この解説では触れなかったが，逆行列を求める（連立方程式を解くためには必ずしも必要ないが）場合にも適用することができる．ここで解説した連立 1 次方程式の解の分類（15 頁の分類表）は，行列の**階数**（rank）といわれる数と密接な関係がある．それについては他書（タイトルに「線形代数」が含まれているもの）で勉強してもらいたい．実は，線形代数の分野で言えば，この解説はまだ序の口である．もう少し専門的なテキストによる学習に進んで，イメージ豊かな世界をのぞいてもらいたい．

参考文献

[1]　数理工統合教育検討委員会編，数理工統合Ⅲ，金沢工業大学，2005 年.

---

1) $A^{-1}\boldsymbol{b}$ を一般的に求めた「クラメルの公式」があるが，これも３次以上になると計算が複雑になる．

2) 2 章の行基本変形Ⅰ，Ⅱ，Ⅲをそれぞれ行列で表すとどうなるか：３次の場合の係数行列（(5.1)式，(5.2)式の A）に左からかける行列として考えてみよ．