11. 斜方投射

さらに一般化して,物体を斜め上方に投げ上げたときの運動について考えてみましょう.

これは，これまでの話とは異なり，運動方向とは違う方向に加速度が生じている運動です.

このような場合，物理では変位，速度，加速度がベクトルである性質を最大限に活用します.

つまり，変位や速度を，加速度が生じる方向(鉛直方向)とそれに対して直交する方向(水平方向)に分けて考えます.

具体的に，水平方向から上向きに θ の方向に速度 v_0 で飛び出した物体が，重力加速度 g を受けて運動することを考えます.

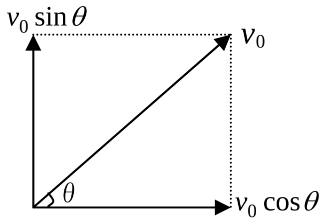

図 11.1 速度の分解

すると，初速度 v_0 を水平方向に $v_0 \cos\theta$，鉛直方向に $v_0 \sin\theta$ と分解することができるので,

水平方向：初速度 $v_0 \cos\theta$，加速度 0 の等速直線運動

鉛直方向：初速度 $v_0 \sin\theta$，加速度-g の等加速度運動

と考えることができます.

したがって，水平方向における t 秒後の速さ v_x と変位 x は

$$v_x = v_0 \cos\theta \tag{11.1}$$

$$x = v_0 t \cos\theta \tag{11.2}$$

と書けます.

また，鉛直方向における t 秒後の速さ v_y 変位 y は

$$v_y = v_0 \sin\theta - gt \tag{11.3}$$

$$y = v_0 t \sin\theta - \frac{1}{2} g t^2 \tag{11.4}$$

と書けます.

これらの 4 つの式をもとに，図 11.2 にあるような様々な値を求めてみましょう.

まず，時間について考えてみます.

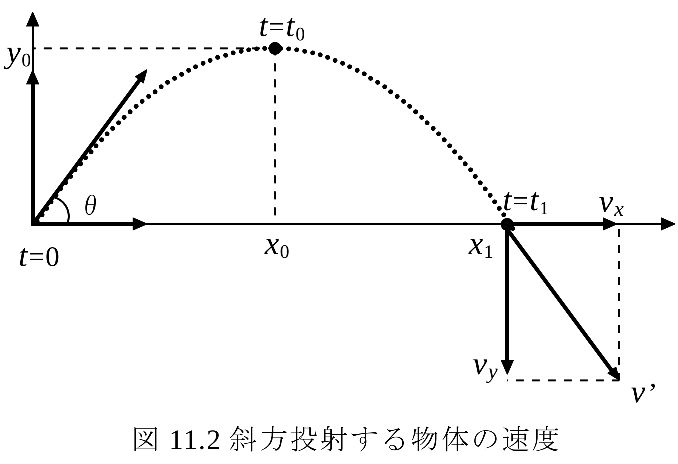

図 11.2 斜方投射する物体の速度

最高点に達する時間 t_0 とは，鉛直方向の速度が 0(このとき，水平方向の速度は全く考慮に入れる必要がありません．なぜなら，水平方向の速度がどんな値であれ，鉛直方向の速度が 0 になれば，それ以上高く上がることはあり得ないからです)となるときの時間です.

したがって, 式(11.3)において $v = 0$ より

$$0 = v_0 \sin\theta - g t_0$$

$$\therefore \quad t_0 = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \tag{11.5}$$

となります．

また，投げ上げた高さに落下するときの時間 t_1 は，鉛直方向の変位が 0(このとき，水平方向の変位は全く考慮に入れる必要がありません)となるときの時間です．

したがって，式(11.4)において $y = 0$ より

$$0 = v_0 t_1 \sin\theta - \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$t_1\left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t_1\right) = 0$$

$$\therefore \quad t_1 = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \tag{11.6}$$

となります．

この結果から $t_1 = 2t_0$ であり，投げ上げてから最高点に達するまでの時間と，最高点からもとの高さまで落下するのに要する時間が同じであることがわかります．

次に，変位について考えてみます．

最高点の高さ y_0 は，先に求めた t_0 における鉛直方向の変位だから，式(11.4)より

$$\begin{aligned} y_0 &= v_0 t_0 \sin\theta - \frac{1}{2} g t_0^2 \\ &= v_0 \sin\theta \times \frac{v_0 \sin\theta}{g} - \frac{1}{2} g \times \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \quad y_0 = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \tag{11.7}$$

と，求まります．

また，このときの水平方向の移動距離 x_0 は，式(11.2)より

$$x_0 = v_0 \cos\theta \times \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

$$\therefore \quad x_0 = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \tag{11.8}$$

と，求まります．

次に，水平到達距離(水平方向に最も遠くまで飛ぶ距離)x_1 は，式(11.2)に t_1 を代入することで求まるから，

$$\begin{aligned} x_1 &= v_0 \cos\theta \times \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \\ &= \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g} \qquad (\because \ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta) \tag{11.9}$$

となります．

この式を見ると，初速度 v_0 が同じ場合，$\sin 2\theta$ が最大となるとき，すなわち $\theta = 45°$ のとき，最も遠くまで飛ぶことがわかります．

続いて，投げられた物体がどのような軌跡を描いて飛ぶか(図 11.2 の点線で描かれた曲線の式)について考えてみます．

これは，式(11.2)と(11.3)から時間 t を消去して，x と y の関係式を求めればよいので，式(11.2)より

$$x = v_0 t \cos\theta$$

$$\therefore \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \tag{11.10}$$

この結果を，式(11.4)に代入して整理すると，

$$\begin{aligned}
y &= v_0 \sin\theta \times \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \times \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2 \\
&= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 \\
&= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \left(x^2 - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{2v_0^2 \cos^2\theta}{g} x \right) \\
&= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \left(x^2 - \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} x \right) \\
&= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \left\{ \left(x - \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \right)^2 - \left(\frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \right)^2 \right\} \\
&= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \left(x - \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \right)^2 + \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \left(\frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \right)^2 \\
&= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \left(x - \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \right)^2 + \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \times \frac{v_0^4 \sin^2\theta \cos^2\theta}{g^2}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \left(x - \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g} \right)^2 + \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \tag{11.11}$$

と，上に凸の放物線になることがわかります．

最後に，速度について検討します．

地面に戻ってきたときの水平方向の速度 v_x は，式(11.1)より，時間には無関係であることから

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

となります．

また，鉛直方向の速度 v_y は，式(11.3)と(11.6)より，

$$
\begin{aligned}
v_y &= v_0 \sin\theta - gt_1 \\
&= v_0 \sin\theta - g \times \frac{2v_0 \sin\theta}{g}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad v_y = -v_0 \sin\theta \tag{11.12}$$

となり，投げ上げたときの速さは同じで，向きが逆向きになることがわかります．

よって，地面に落下する直前の速さ v'は

$$
\begin{aligned}
v' &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\
&= \sqrt{(v_0 \cos\theta)^2 + (v_0 \sin\theta)^2} \\
&= \sqrt{v_0^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta)}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad v' = v_0 \tag{11.13}$$

となり，まったく同じ速さで落下することがわかります．

また，このときの水平面とのなす角をφとすると，

$$
\begin{aligned}
\tan\phi &= \frac{v_y}{v_x} \\
&= \frac{v_0 \sin\theta}{v_0 \cos\theta} \\
&= \tan\theta
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \phi = \theta \tag{11.14}$$

となり，投げ上げたときと同じ角度で落下してくることがわかります（もっとも，放物線を描いて運動するとわかったことで，放物運動は軸を中心に左右対称となるから，当たり前のことですが）．