1. 空気の弾性的性質

音は空気が移動して伝わるのではなく，空気の振動がドミノ倒しのように近傍の空気を振動させることにより伝わっていく．このように空気の振動が伝わる速さが音速である．音速を理論的に求めるには，まず空気の性質を知る必要がある．注射器などのピストンに空気を入れてピストンを押すと押し返されるという経験をしたことがあると思う．このように空気はバネと同じような弾性的性質をもっている．以下に空気の弾性的性質について考える．

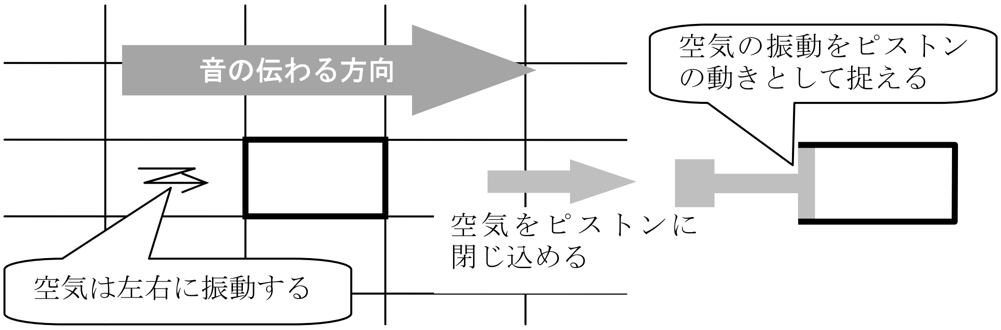

図 1.1　空気性質を考える方法

図 1. 1 に示すように, 空気を分割し，その 1 つをピストンの中に詰め込む．次に図 1. 2 に示すように，詰め込んだ空気を，ピストンを押して圧縮するとする．

まず，大気圧 P_0 の空気が入っている断面積 S のピストンを押し込んで Δd 変位させる。その時に必要なピストンを押す力 F を求める（ここでは Δx に比べ Δd は微小とする）．

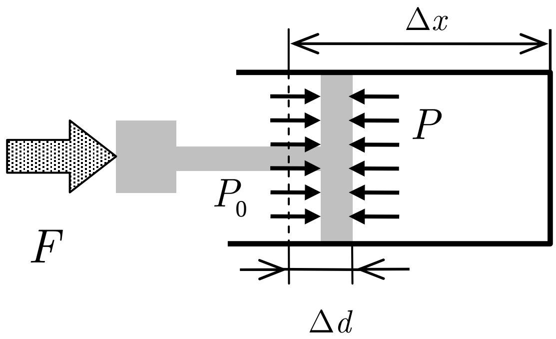

図 1.2　ピストンによる空気の圧縮

ピストンの変位によって, ピストンの中の空気の体積 V_0 は ΔV だけ減少して V になり，圧力 P_0 は ΔP 増加して P となる（ただし $\Delta V > 0$，$\Delta P > 0$ とする）．すなわち,

$$V = V_0 - \Delta V \tag{1.1}$$

$$P = P_0 + \Delta P \tag{1.2}$$

と表すことができる．

ピストンの中の空気は熱の出入りのない断熱変化であったとすると,

$$PV^{\gamma} = 一定 \tag{1.3}$$

（ただし，γ は比熱比で $\gamma = \dfrac{C_P}{C_V}$，$C_V$ は空気の定積比熱，C_P は空気の定圧比熱である）

という関係がある（熱力学の断熱変化を勉強する必要がある）．

ピストンを押す前後で(1.3)式が成り立つので,

$$P_0 {V_0}^{\gamma} = PV^{\gamma} \tag{1.4}$$

の関係が得られる．

ピストンの寸法より，

$$V_0 = S\Delta x \tag{1.5}$$

$$V = S\left(\Delta x - \Delta d\right) \tag{1.6}$$

である．

(1.4)式に(1.2)式，(1.5)式，(1.6)式を代入すると，

$$P_0\left(S\Delta x\right)^{\gamma} = \left(P_0 + \Delta P\right)\left\{S\left(\Delta x - \Delta d\right)\right\}^{\gamma}$$

が得られ，これを以下のように変形する．

$$P_0\left(S\Delta x\right)^{\gamma} = \left(P_0 + \Delta P\right)\left\{S\Delta x\left(1 - \frac{\Delta d}{\Delta x}\right)\right\}^{\gamma}$$

$$P_0\left(S\Delta x\right)^{\gamma} = \left(P_0 + \Delta P\right)\left(S\Delta x\right)^{\gamma}\left\{\left(1 - \frac{\Delta d}{\Delta x}\right)\right\}^{\gamma} \tag{1.7}$$

$\dfrac{\Delta d}{\Delta x}$は微小なので，$h$が微小なときの 1 次近似式$\left(1+h\right)^{\alpha} \fallingdotseq 1+\alpha h$を用いると(1.7)式は，

$$P_0\left(S\Delta x\right)^{\gamma} \fallingdotseq \left(P_0 + \Delta P\right)\left(S\Delta x\right)^{\gamma}\left(1 - \gamma\frac{\Delta d}{\Delta x}\right)$$

となる．

さらに，両辺を$\left(S\Delta x\right)^{\gamma}$で割ると，

$$P_0 \fallingdotseq \left(P_0 + \Delta P\right)\left(1 - \gamma\frac{\Delta d}{\Delta x}\right)$$

となり，さらに式を展開して整理していくと，

$$P_0 \fallingdotseq P_0 + \Delta P - P_0\gamma\frac{\Delta d}{\Delta x} - \Delta P\gamma\frac{\Delta d}{\Delta x}$$

$$\Delta P - P_0\gamma\frac{\Delta d}{\Delta x} - \gamma\Delta P\frac{\Delta d}{\Delta x} \fallingdotseq 0 \tag{1.8}$$

となる．

$\Delta\xi$が微小なのでΔPも微小である．よって，$\gamma\Delta P\dfrac{\Delta d}{\Delta x}$は 2 次の微小量となり他の項と比較すると無視することができるぐらい微小になる．よって，(1.8)式は，

$$\Delta P - P_0\gamma\frac{\Delta d}{\Delta x} \fallingdotseq 0$$

$$\Delta P \fallingdotseq \frac{P_0\gamma}{\Delta x}\Delta d \tag{1.9}$$

となる．今後, (1.9)式の≒は＝とみなせるとして，

$$\Delta P = P_0 \gamma \frac{\Delta d}{\Delta x} \tag{1.10}$$

を用いることにする．

ピストンの柄の部分の力の釣り合いを考えると，

$$P_0 S + F = PS \tag{1.11}$$

の関係式が得られる．

(1.11)式に(1.2)式を代入すると，

$$P_0 S + F = \left(P_0 + \Delta P\right) S$$

$$P_0 S + F = P_0 S + \Delta P S$$

$$\Delta P S - F = 0$$

$$\Delta P = \frac{F}{S} \tag{1.12}$$

となる．(1.12)式を(1.10)式に代入すると，

$$\frac{F}{S} = P_0 \gamma \frac{\Delta d}{\Delta x}$$

$$F = \frac{P_0 S \gamma}{\Delta x} \Delta d \tag{1.13}$$

が得られる．

この(1.13)式より，ピストンの変位量Δdはピストンを押す力Fに比例している．すなわち，ピストンの中にある空気はバネと同じような弾性的性質を示す．