2. 音速を表す式の導出

次に，断面積Sのチューブの中を伝わる音について考えていくことにする．

音は，チューブの中の空気が移動して伝わるのではなく，空気がチューブの長さ方向に振動し，この振動が近傍の空気をドミノ倒しのように次々と振動させることにより伝わる．よって，チューブの中の空気を，図 2.1 のように細かく分割して長さΔxの微小体積要素（図 1.2 のピストン内部の空気）が連結したものと考え，空気の振動をピストンの変位と置き換えて，音の伝達を考えることにする．

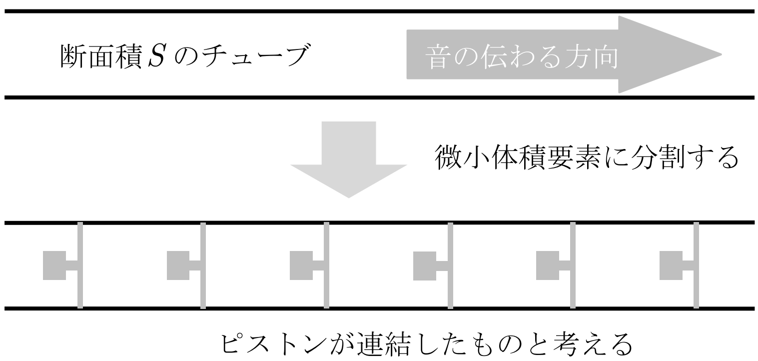


図 2.1　音速を求めるためのモデル

まず，チューブの中の空気に音が伝わり始めた状況，すなわち，ある部分の空気が振動（変位）し始めた状況を図 2.2 のモデルを用いて説明する．

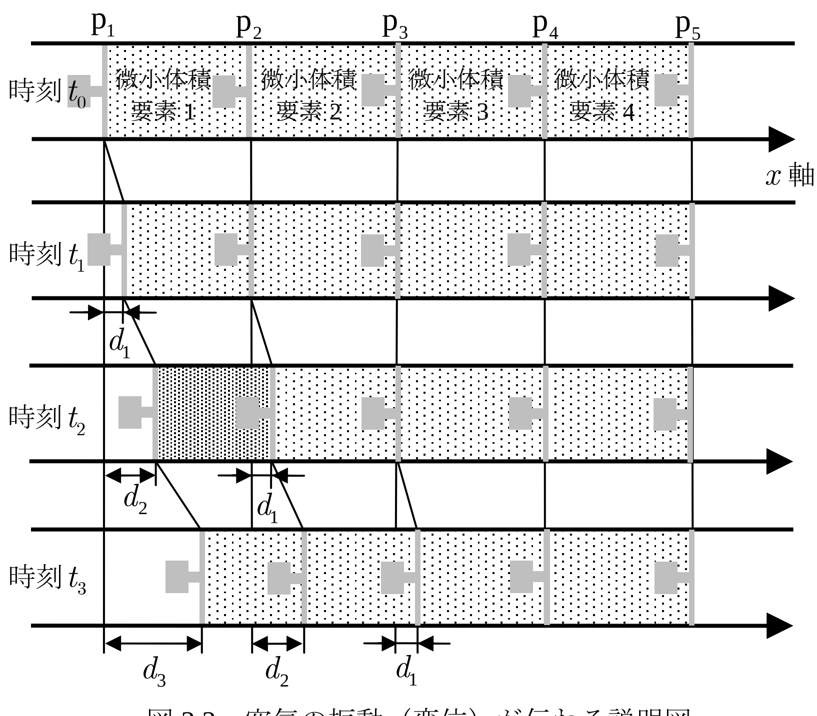


図 2.2　空気の振動（変位）が伝わる説明図

音の伝わる方向をx軸の正方向とする．音が伝わる前の各微小体積要素のx軸方向の長さをΔxとし，微小体積要素の境界には仮想のピストンが存在すると考える．さらに，ピストンは時間間隔Δtで以下のように変化するとする．音がチューブの左から伝わってきて時刻t_0で音が微小体積要素 1 の左端のピストンp_1に到達しピストンの変位が始まり，Δtの間にd_1だけピストンp_1

が変位する．また, 波は時間Δtの間にΔx進むとする．ピストンp_1の変位が，t_0で 0，t_1でd_1，t_2でd_2, t_3でd_3と変化すると, 微小体積要素 2 の左端のピストンp_2の変位はt_0, t_1で 0, t_2でd_1，t_3でd_2に変化し，微小体積要素 3 の左端のピストンp_3の変位はt_0，t_1，t_2で 0，t_3でd_1に変化する．このようにそれぞれのピストン（微小体積要素の境界）が変位することにより，すなわち，空気が局部的に圧縮，膨張することにより, 空気の振動である音は伝わっていく.

音が伝わる様子を図 2.3 に示す．x_1，x_2，$\cdots$，x_5は，仮想ピストンp_1，p_2，$\cdots$，p_5の音が伝わる前のx軸上の位置のことである．ピストンp_1（微小体積要素 1 の左端）の変位の時間的変化（振動）がx軸方向に伝わっていく様子がよくわかる.

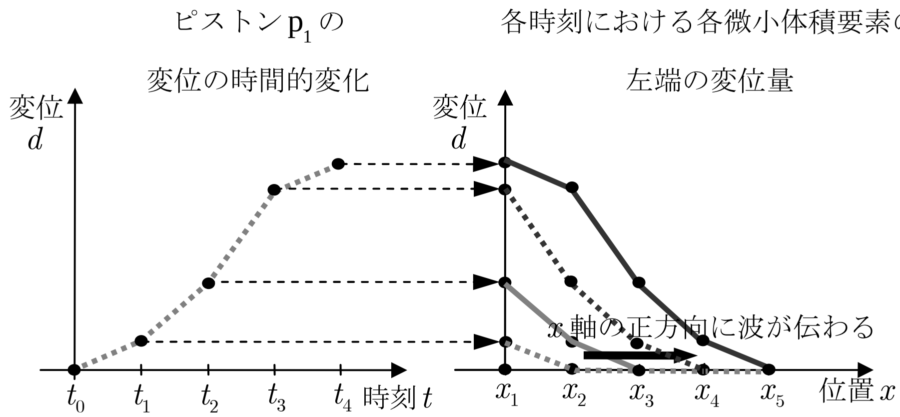
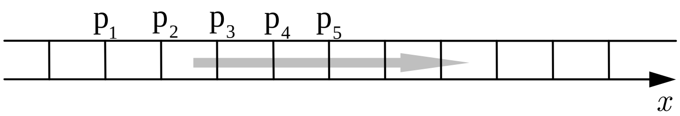


図 2.3　音が伝わる様子

図 2.3　の 2 つのグラフを 1 つにまとめて平面的に表現したものが，図 2.4 である．縦の並びが変位の時間的変化，横の並びが変位のx軸方向の変化を示す.



	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9
t_0	d_0								
t_1	d_1	d_0							
t_2	d_2	d_1	d_0						
t_3	d_3	d_2	d_1	d_0					
t_4	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0				
t_5	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0			
t_6	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0		
t_7	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0	
t_8	d_8	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0
t_9	d_9	d_8	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1

図 2.4　音が伝わる様子

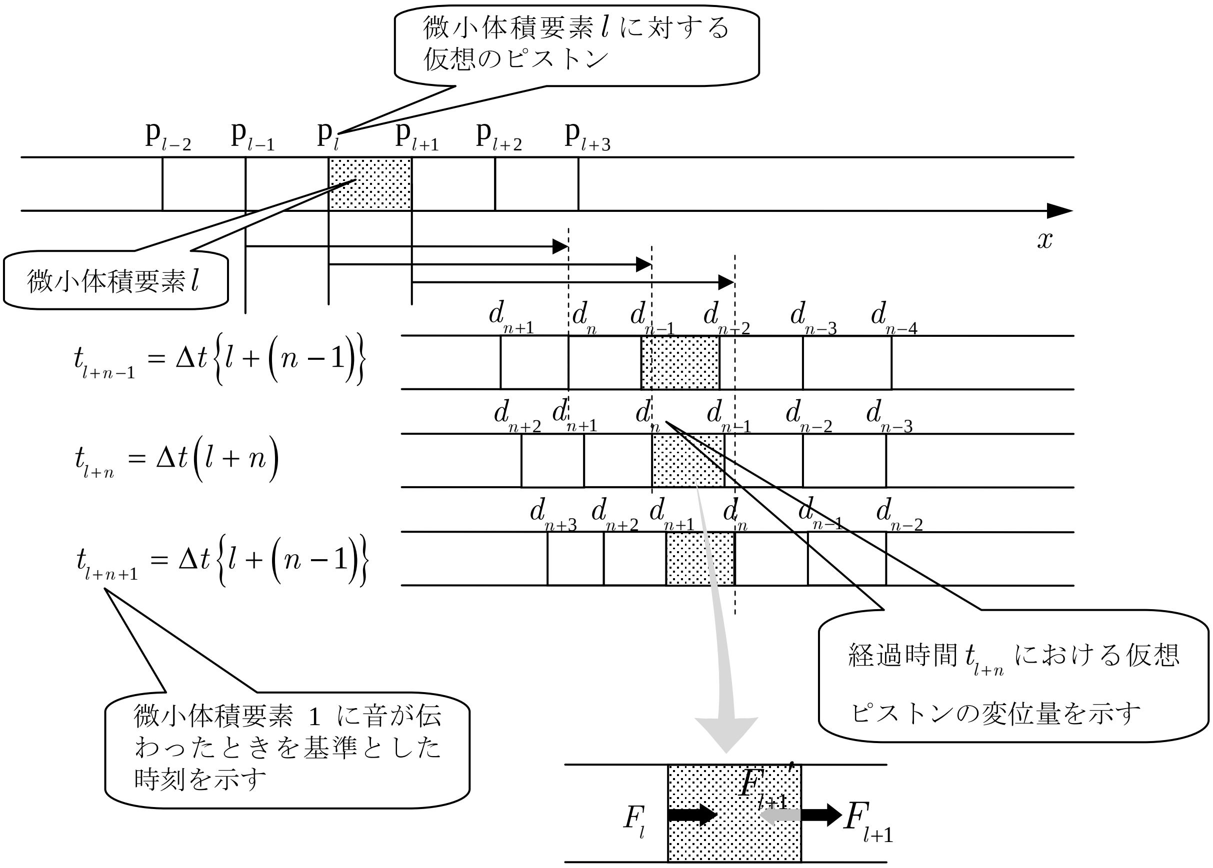


図 2.5　音速を求めるモデル

音の伝わる速さを，図 2.5 を用いて導くことにする．

微小体積要素 l の運動方程式は,

$$ma = F \tag{2.1}$$

（ただし，m は微小体積要素の質量，a は微小体積要素 l の x 軸方向へ移動する加速度，F は微小体積要素 l に働く外力である．）

である．

ρ を空気の密度，S をチューブの断面積とすると，m は,

$$m = \rho S \Delta x \tag{2.2}$$

と表される．

Δt が極微小な値であると Δx も極微小な値となり，微小体積要素の重心の速度は微小体積要素の右端の速度と同じであるとみなせる．

時刻 t_{l+n-1} から t_{l+n} の間の微小体積要素 l の平均の速度 v_{l+n-1} は,

$$v_{l+n-1} = \frac{d_{n-1} - d_{n-2}}{\Delta t} \tag{2.3}$$

となる． Δt が極微小な値であるので，Δt の値は t_{l+n-1} に比べると無視でき，速度 v_{l+n-1} は時刻 t_{l+n-1} の速度とみなすことができる．

同様にして t_{l+n} の間の微小体積要素 l の平均の速度 v_{l+n} は

$$v_{l+n} = \frac{d_n - d_{n-1}}{\Delta t} \tag{2.4}$$

となる．

時刻t_{l+n-1}から時刻t_{l+n}の間の微小体積要素lの平均の加速度a_{l+n}は，

$$a_{l+n} = \frac{v_{l+n} - v_{l+n-1}}{\Delta t} \tag{2.5}$$

である． Δtを極微小な値として考えると，速度のときと同様に加速度a_{l+n}は時刻t_{l+n}における加速度であるとみなせる（加速度a_{l+n}は時刻t_{l+n-1}における加速度とみなすこともできる）．よって，(2.3)式，(2.4)式を(2.5)式に代入すると，

$$a_{l+n} = \frac{v_{l+n} - v_{l+n-1}}{\Delta t} = \frac{\dfrac{d_n - d_{n-1}}{\Delta t} - \dfrac{d_{n-1} - d_{n-2}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}}{\left(\Delta t\right)^2} \tag{2.6}$$

となる．

運動方程式(2.1)式のFは微小体積要素lに働く外力の和であるので，この場合，

$$F = F_l + F_{l+1}{}' \tag{2.7}$$

（ただし，F_lは微小体積要素lの左端界面に働く外力，$F_{l+1}{}'$は微小体積要素lの右端界面に働く外力で，微小体積要素$l+1$の左端界面に働く外力F_{l+1}と作用，反作用の関係にある．）

となる．微小体積要素lの長さΔxの外力による変化Δd_lはd_nとd_{n-1}差となるので(1.13)式より，

$$F_l = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\Delta d_n = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_n - d_{n-1}\right) \tag{2.8}$$

となる．同様に考えて，

$$F_{l+1} = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\Delta d_{l+1} = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_{n-1} - d_{n-2}\right) \tag{2.9}$$

となる．$F_{l+1}{}'$はF_{l+1}の反作用なので符号が変わり，

$$F_{l+1}{}' = -\frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\Delta d_{l+1} = -\frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_{n-1} - d_{n-2}\right) \tag{2.10}$$

となる．よって，外力の総和Fは(2.7)式に(2.8)式，(2.10)式を代入することにより，

$$F = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_n - d_{n-1}\right) - \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_{n-1} - d_{n-2}\right) = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}\right) \tag{2.11}$$

となる．

(2.2)式，(2.6)式，(2.11)式を(2.1)式に代入すると（(2.6)式のa_{l+n}を(2.1)式aに代入している），

$$\rho S \Delta x \frac{d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}}{\left(\Delta t\right)^2} = \frac{P_0 S\gamma}{\Delta x}\left(d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}\right) \tag{2.12}$$

となる．この(2.12)式を変形すると，

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2}=\frac{P_0\gamma}{\rho}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\sqrt{\frac{P_0\gamma}{\rho}} \tag{2.13}$$

となる．

波は時間Δtの間にΔx進むので$\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$は音の伝わる速さ$v$になる．

微小体積要素の気体の状態方程式$P_0V=nRT$より

$$P_0=\frac{nRT}{V} \tag{2.14}$$

（ただし，Rは気体定数，Tは絶対温度，nはモル数である．）

となる．

(2.14)式を(2.13)式に代入すると，

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\sqrt{\frac{\frac{nRT}{V}\gamma}{\rho}}=\sqrt{\frac{RT\gamma}{\frac{V\rho}{n}}} \tag{2.15}$$

となる．$\dfrac{V\rho}{n}$は1モル当たりの空気の質量になり，これをMとおくと(2.15)式は,

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\sqrt{\frac{RT\gamma}{M}} \tag{2.16}$$

となり音速を求める式が導かれた．

絶対温度Tと摂氏温度tの関係$T=273+t$を(2.16)式に代入し式を変形すると，

$$\begin{aligned} v &=\sqrt{\frac{RT\gamma}{M}} \\ &=\sqrt{\frac{R\gamma}{M}(273+t)} \\ &=\sqrt{\frac{273R\gamma}{M}}\sqrt{1+\frac{t}{273}} \end{aligned}$$

hが微小なときの1次近似式$(1+h)^{\alpha}\fallingdotseq 1+\alpha h$の関係を用いると

$$\fallingdotseq\sqrt{\frac{273R\gamma}{M}}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{273}\right) \tag{2.17}$$

ここで，Rは気体定数で8.31$\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$，$M$は空気1モルの質量で$2.89\times10^{-2}\mathrm{kg\cdot mol^{-1}}$，$\gamma$は空気の定圧比熱と定積比熱の比で約1.4である．これらの値を(2.17)式に代入すると，

$$v\fallingdotseq 331.5+0.6t \tag{2.18}$$

となる．この式より0℃で，音速vの値は約331.5 m/sとなる．この値は，音速の実測値とよく一致している．