

# 正弦曲線（サインカーブ）と三角関数の合成について

石川県立七尾東雲高等学校

中川 久仁彦

## ねらい

物理で学ぶ正弦波が表す波形は、数学で学ぶ正弦曲線である。また、重ね合わせの原理や波の干渉は、三角関数の合成と関係が深い。自然現象や実験結果を式やグラフに表すとき、何を  $x$  とおくか。また、何について文字を用いて表すかが重要であり、グラフでは、何を軸として設定するかが大切です。

私自身も高校時代、物理の授業で波の方程式  $y = A \sin 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$  を学んだ際、グラフの横軸を  $x$  にするか、 $t$  にするかで、グラフの形が異なることになかなか気付かず、大変苦労したこと覚えています。

ところで、音波というと、正弦曲線の形を想像する人が多いと思いますが、決して正弦曲線の形をしたものが、空中を飛び交っているわけではありません。音波を表現するのに必要なデータを含んで表されたものが、正弦曲線の形をしているだけです。実際にはそう単純ではありませんが、その基本となるものが正弦曲線です。

また、波というと海の波を想像する場合もありますが、目で見える形と規則により立式化され表現された波の形とがあるということです。そういう点をしっかりと区別し、式で表された場合は、式が表しているものが何であるかを理解しなければ、混乱が生じてしまいます。

これは物理で、これは数学と人間が勝手に区別しているだけで、何かかけ離れたものと思いがちな事が多いと思います。今回は、波に関する事や三角関数の合成などについて、いろいろと考えてみました。内容的には、高校の教科書にててくる範囲で扱っています。何か参考になる点があれば、幸いです。

## 目次

1. 次のグラフを見て、何をイメージしますか？
2. 波とは何だろう？
3. 物理で学ぶ単振動について
4. 数学で学ぶ正弦曲線について
5. ちょっと一言
6. 数学で学ぶ三角関数の合成について
7. 合成によるグラフと波について
8. おわりに

## 1. 次のグラフを見て、何をイメージしますか？

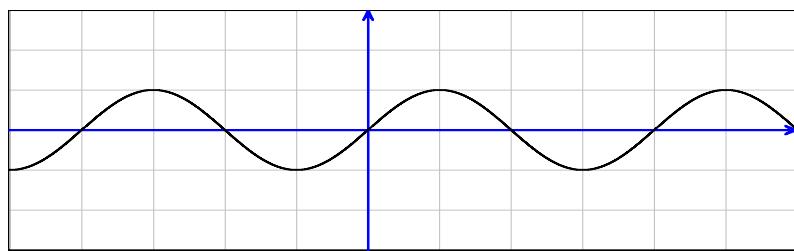


図 1.1 何をイメージ？

何人かの生徒からでた答え

音波（中学時代の理科の実験）、波、地震、心電図、正弦曲線など

## 2. 波とは何だろう？

静かな池の水面に小石を落としたとき、そこに広がる波紋を想像して下さい。石の落ちたところを中心として、初めは小さな円状の波が、時間がたつにつれて四方に広がっていきます。（図 2.1）

波が伝わっていくときに、図 2.1 の OX 線上の各点では、振動が始まり、この振動しているという状態が、時間の経過とともに、空間的に隣に伝わっていくことになります。

このときは、図 1.1 のグラフで、中心 O からの距離を横軸、上下の変位を縦軸に考えると、波が伝わっていく様子が想像できます。このときのグラフは、実際に目で見える波の形に近いです。サッカー場などで、観客がするウエイブを想像するとこんな形ですね。

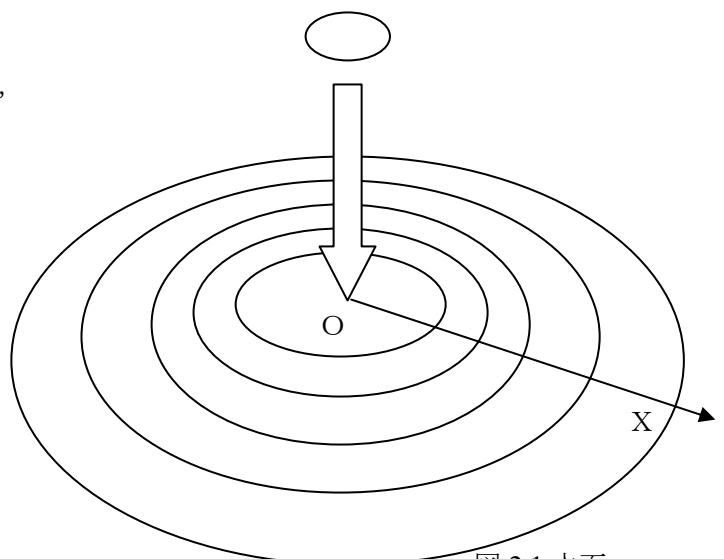


図 2.1 水面

また、池の水面が十分静かであれば、波の変位は時間がたつにつれ、円の半径が次第に大きくなり、遠くまで広がっていきます。このとき、波は、最初につくられたときの形を保ちながら、伝播しようとしています。現実には遠くにいくにつれ、上下の変位は少しずつ小さくなっています。幅も広がっていきます。

ところで、水面に広がる波の途中に木の葉が浮いていた場合、図 2.1 の OX 線上に点 P を決め、その点で木の葉はどのような動きをするでしょうか？（図 2.2）その動きをよく観察してみると、木の葉は波に揺られて上下していて、波の進む方向に動いていないことに気がつきます。このような水面の波のとき、水は各場所でゆれ動いているが、水が流れて岸までやってくるわけではありません。

このことは、波を伝えている水が上下に動くばかりで、波と一緒に進んでいないことを示しています。この場合の水のように波を伝えるものを媒質と呼び、上下の動きを波の変位（変位）といいます。

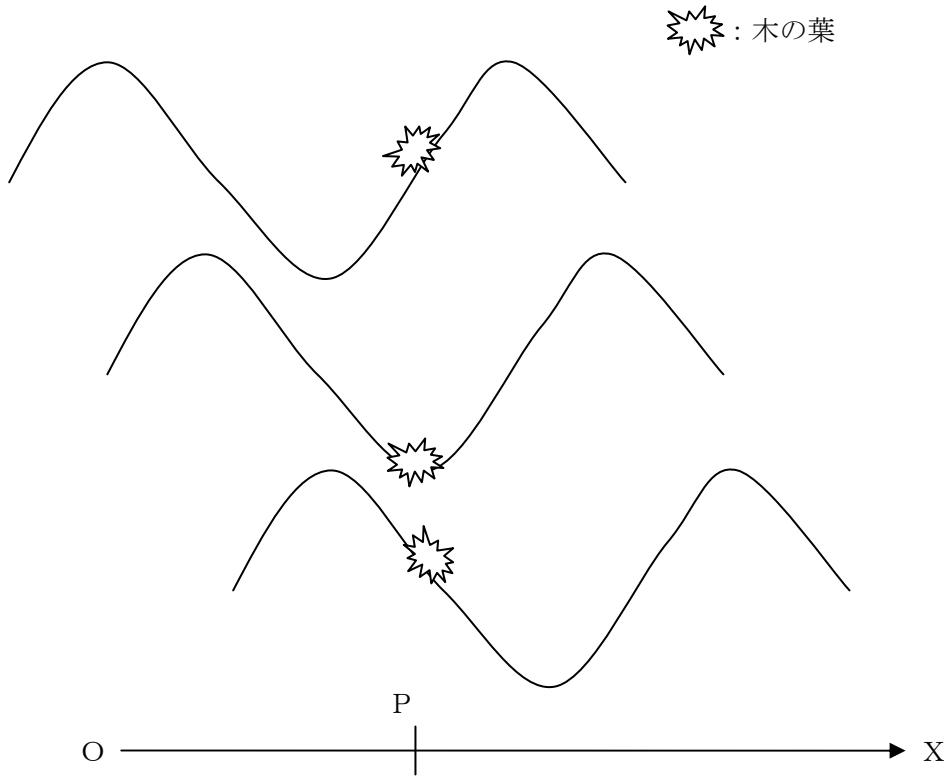


図 2.2 木の葉の動き

いま、この木の葉の運動から波の重要な性質が導かれます。波は、媒質を通して伝播しますが、媒質は変位（上下）するだけで波の進む方向には伝わりません。それでは、何を伝えているのかというと、波のエネルギーということになります。

ところで、木の葉について、 $O X$ 線上のある点  $P$  における変位の様子をグラフで表すと、図 1.1 のグラフで、横軸を時間、縦軸を上下の変位として考えた形に近くなります。こうなると、頭の中で想像するしかありません。

さらに、波というと他にもギターやバイオリンの弦の振動、人の声、地震、テレビやラジオの電波など多くの波があげられます。これらの波は多くの複雑な形で表されますが、これらは、共通の基本的な特徴をもっています。そして、その最も基本となる波の形が図 1.1 の形です。

つまり、波とは、一定の間隔で同じ形がくり返し現れているものです。正確にいうと空間や物体内のある部分での振動や変化が、次々に隣の部分に有限の速度で伝わり、遠くまで及んでいく現象のことです。そして、その現象を表すものとして、一番基本的な波が正弦曲線です。これは、 $\sin$  や  $\cos$  といった三角関数のグラフの形です。

### 3. 物理で学ぶ単振動について

図 3.1 のように、一定の速度で点Oを中心回転する円板を横から見ます。つまり A→O→P の向きで見ます。この半径  $r$  (m) の円板のへりに、小さな柱Bを立て、AO P の方向に光を送り、ついたてにできる柱Bの影の運動を観察すると、影(X)は P を中心として、長さ  $2r$  (m) の線分上を往復運動をする。つまり、行ったり来たりします。この等速円運動をしている物体を平面上に投影したときの影の運動が単振動です。

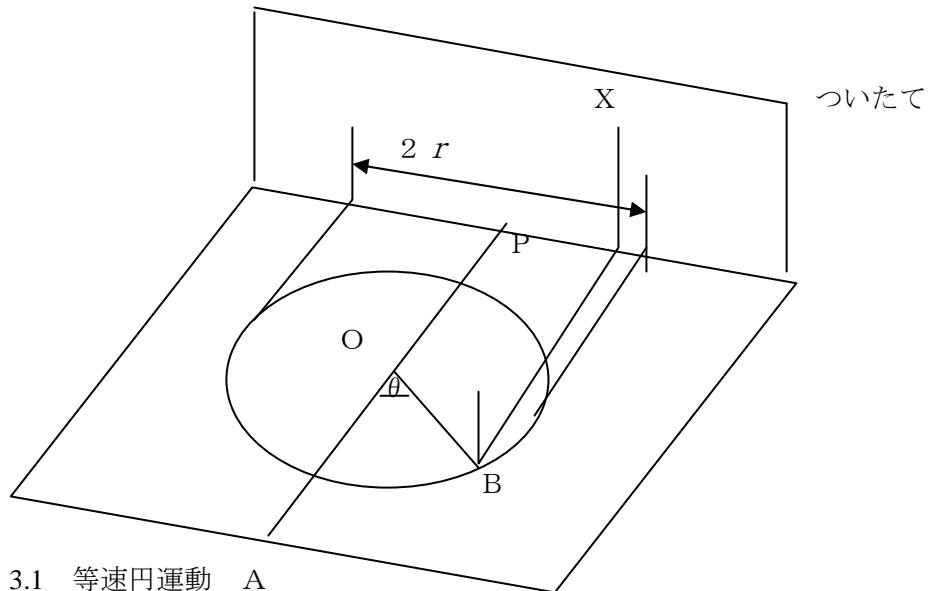


図 3.1 等速円運動 A

$\angle AOB = \theta$  とする。柱Bが直線AO上のAに近い点にあるときから反時計回りにスタートさせると、時間がたつにつれ、 $\theta$  の値は大きくなる。

いま、この往復運動の様子を縦軸に時間または  $\theta$ 、横軸に長さ  $2r$  (m) の線分上の変位とすると、図 3.2 のグラフになります。

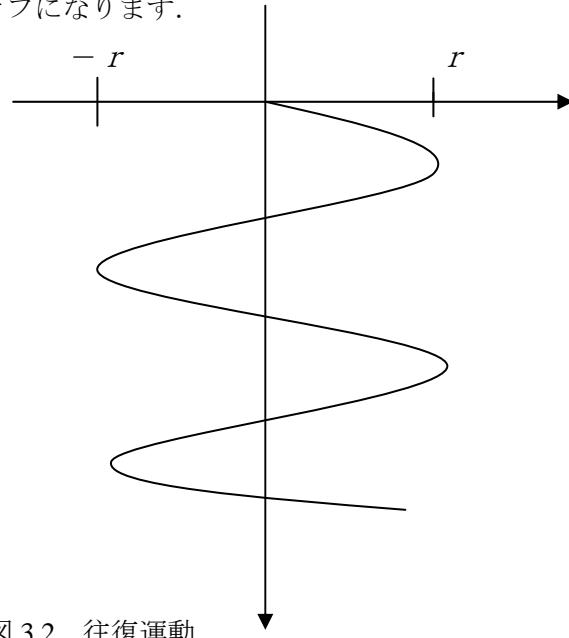


図 3.2 往復運動

この図 3.2 のグラフは、図 1.1 のグラフを時計回りに  $90^\circ$  回転させた形をしています。

## 4. 数学で学ぶ正弦曲線について

図 4.1において、点Pの座標は、 $P (\cos \theta, \sin \theta)$  です。 $\theta$ の値の変化による点Pのy座標の変位の様子が、図 4.2 の  $y = \sin \theta$  のグラフで表されます。

点Pは、反時計回りに動きます。

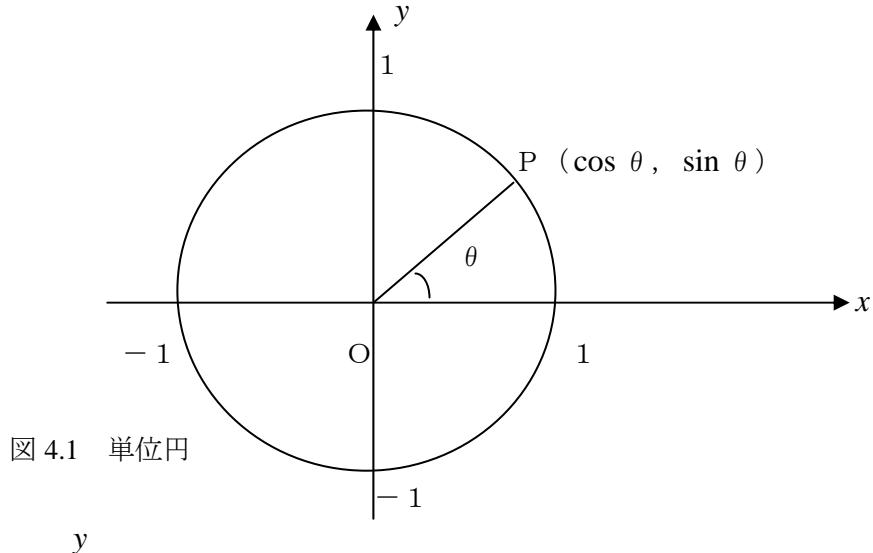


図 4.1 単位円

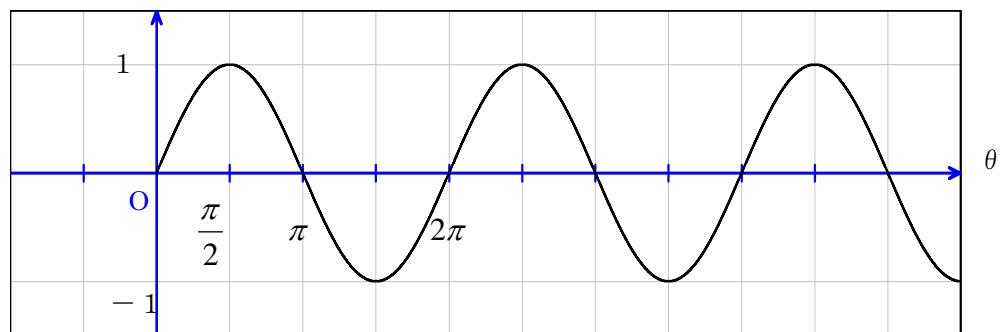


図 4.2 正弦曲線

このグラフは、図 1.1 で横軸を  $\theta$ 、縦軸を  $y$  としたものです。この場合、 $\theta$  は弧度法または度数法で表される角ということになります。

また、 $y = \sin \theta$ 、 $y = \cos \theta$  のグラフで表される曲線を正弦曲線といいます。

余弦曲線とはいわないらしいです。

## 5. ちょっと一言

図 1.1 のグラフと同じ形を置いていても、軸として何をとるかによっていろいろな考え方ができることがわかります。つまり、軸のとり方により水の流れや単振動、ウェイブ、数学で学ぶ正弦曲線などいろいろ考えられるわけです。正弦曲線といふと、サインカーブとも言われます。このサインカーブの用途は広く、上手に扱いたいものです。

## 6. 数学で学ぶ三角関数の合成について

表 6.1 三角比の表

$\theta$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$
$\sin \theta$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\cos \theta$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\sin \theta + \cos \theta$	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	1
$\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$	1	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	-1	0	1	$\sqrt{2}$	1

表 6.1 は、 $\theta$  の値に応じて、 $\sin \theta$ ， $\cos \theta$ ， $\sin \theta + \cos \theta$ ， $\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$  の値を求めたものになっています。また、図 6.1 は、横軸を  $\theta$ 、縦軸を  $y$  として、 $y = \sin \theta$ ， $y = \cos \theta$ ， $y = \sin \theta + \cos \theta$  のグラフです。

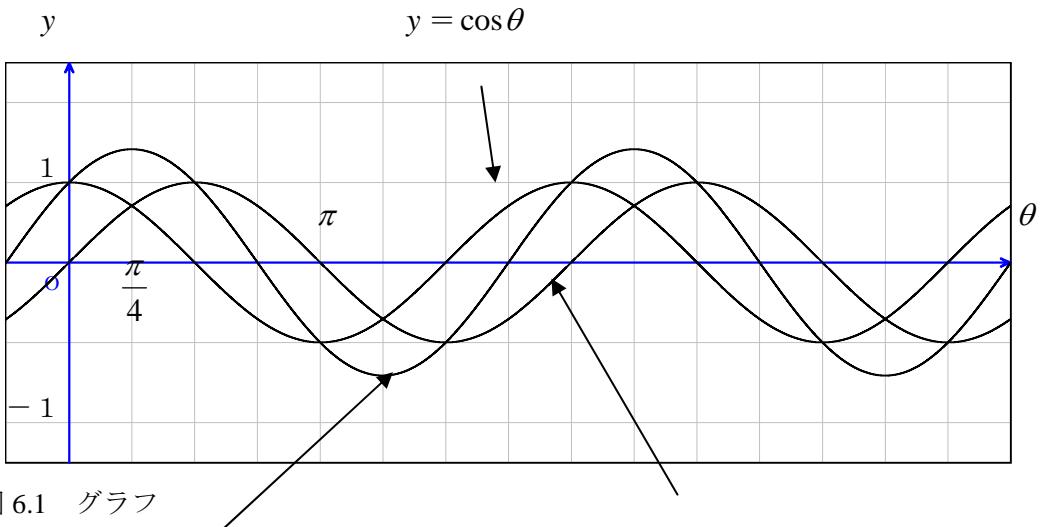


図 6.1 グラフ

$$y = \sin \theta + \cos \theta$$

$$y = \sin \theta$$

数学 II の三角関数の合成の範囲で、 $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$  とできることを

学びますが、もちろんグラフにおいても、 $y = \sin \theta + \cos \theta$  と  $y = \sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{4})$  のグラフは一致します。

ところで、 $y = \cos \theta$  のグラフは、 $y = \sin \theta$  のグラフを  $\theta$  軸方向へ  $-\frac{\pi}{2}$  だけ

平行移動したものですから、2 つとも正弦曲線です。この 2 つの正弦曲線を重ねる（合成する）ことにより新しい曲線がうまれたことになります。

## 7. 合成によるグラフと波について

正弦曲線がいくつか合成されることにより、新たに別の波がうまれることがわかりました。このことから、図 7.1、図 7.2 のように波長の違う①と②のグラフを合成させ、①+②のグラフを書くと、新しいグラフができるという感覚が理解できるはずです。

つまり、複雑なグラフについても基本として、正弦曲線を考えることができます。

また、加えるグラフの波長を変えるといろんな形がうまれます。ぜひ、調べてみて下さい。

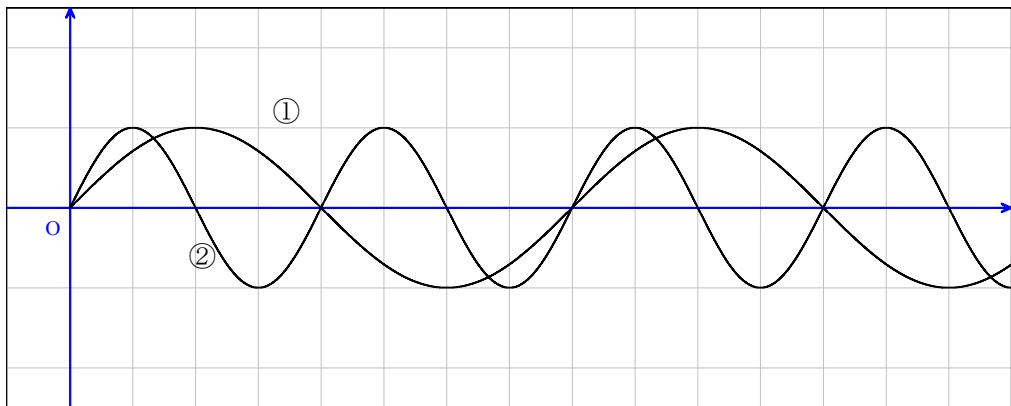


図 7.1 異なるグラフ

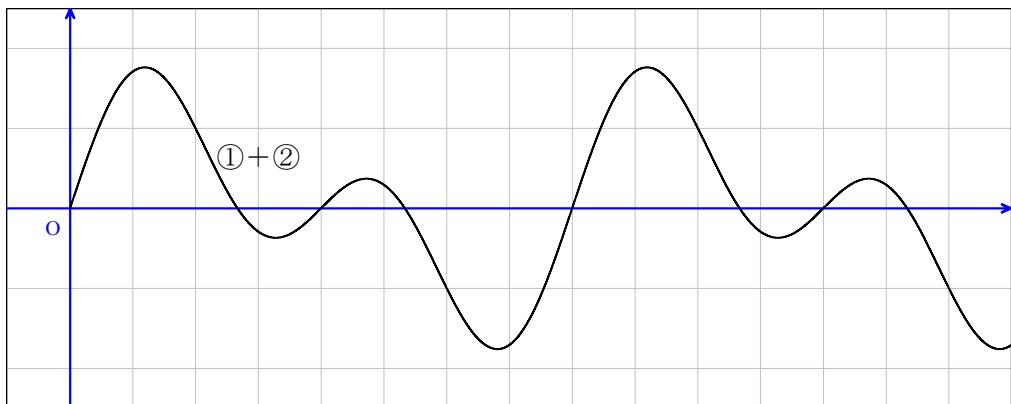


図 7.2 合成

## 8. おわりに

今回は、波について考えながら、数学で学ぶ正弦曲線（サインカーブ）や三角関数の合成の考え方が、物理で扱う単振動や波の現象と深く結びつくことについて考えてきました。また、重ね合わせの原理などにも関連します。この正弦曲線は、他にも多くの自然現象を扱う場面で、その基になるものとして登場してきます。今後とも、その応用についても考えていきたいと思います。

### 参考文献

- [1] 近角聰信 田沼静一 長谷川博一 ほか7名 発行教科書 物理、東京書籍株式会社、1983年
- [2] 飯高茂 松本幸夫 ほか22名 発行教科書 新編数学Ⅱ、東京書籍株式会社、2005年