教科書の少し向こうにある数学

金沢大学教育学部附属高等学校
岡　山　正　歩

ねらい

かなり以前のことであるが，いろいろな学力レベルの生徒の教科書予習を観察したことがある。教科書をきちんと読むことはとても難しいと感じた。それぞれのレベルに応じて，どこまで分かれば分かったとするかも異なる。力をつけていくものとそうでないものの違いにはいろいろな要素が絡んでくると思うが，以来教科書には余計に注意を払うようになった。楽しく学習できるに越したことはないが，ノルマを課して勉強したり，ある種の強迫観念に駆られて勉強したりという経験は，多かれ少なかれ誰にでもある。そういう経験も，これまで見えなかったものが見えてきたり，「教科書だっておもしろい」と感じるような道への一里塚であり，決して無意味ではないと思う。誰もが分からないことを抱えながら学んでいる。肩の力を抜いて数学と上手に付き合っていくことを身につければもっと面白くなって伸びていくのに，と思うことも度々である。

大学で講師を務めるある小説家が，実際の小説を用いて「小説の読み方」を講義しているという話を聞いたことがある。数学の教科書もこのように読んでほしい，というものがいくつかある。例えば，次のようなことに思いを巡らした経験はないだろうか。

（Ⅰ）　数列の学習で，公式　$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$，$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$　を学ぶと，この先はどうなっているのだろうかと考える。教科書の見様見真似で$\sum_{k=1}^{n}k^4$，$\sum_{k=1}^{n}k^5$ を計算する。

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{5}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^5=\frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

展開して規則性について考えてみると面白いのでは・・・？　表現に少し工夫すれば，この先に何かありそうでは・・・？　とさらに膨らむ。

（Ⅱ）　メネラウスの定理とチェバの定理は中学生にもかなり知られている定理である。二つの定理の主張は，例えば，ある高等学校教科書には次のようにある。

（メネラウス）ある直線がΔABCの辺BC,CA,AB，またはその延長と，それぞれ点P,Q,Rで交われば，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$　が成り立つ。

（チェバ）　ΔABCの辺BC,CA,AB上にそれぞれ点P,Q,Rがあり，３直線AP,BQ,CRが１点で交われば，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$　が成り立つ。

一方しか知らないというものはほとんどいない。それ程に，二つの定理は双子の兄弟のように紹介されてはいるが，実は，メネラウスはユークリッドから 400 年位後の人，チェバはニュートンやライプニッツの頃の人で 1600 年近い歴史の隔たりがある。この隔たりは，一つの定理が生まれてくるための歴史の苦しみだったのだろうか。よく似た主張であるが，定理の仮定は「三点が一直線上にある」「三直線が一点で交わる」となっていて，「点」と「直線」が入れ替わっている，なのに結論が同じである。なんとなく分かったようで分からない。本当にチェバが最初の発見者なのであろうか。空白の 1600 年間に歴史のロマンを感じる。ここにも何かが見え隠れしているような気がしてならない。

日常の興味・関心は何気ないことがきっかけとなって膨らんでいく。それを大切にして胸の中で温めていくことが必要かな？と思う。一字一句をわかる必要がない，小説を読むときのことを考えれば分かる。あらすじが分かる程度に読むというのも一つの方法である。あるときはそういう数学の学び方，数学とのつき合い方がある。高校生の持っている知識で十分なのではあるが，少し背伸びをしてお読みいただく部分もあるかもしれない。

目　　次

（Ⅰ） $B_p=\sum_{k=1}^{n}k^p$（ベルヌーイの多項式）のある帰納的構成

１． B_2,B_3の三角数による分割

２． B_4～B_9の帰納的構成

３．多項式B_pに関する定理とその証明

４．多項式B_pの係数を決定する漸化式

５．具体的なB_pの係数一覧

（Ⅱ）メネラウスの定理・チェバの定理の双対性

１．定理の主張

２．射影幾何と双対の原理

３．双対性に注目した定理の記述

４．双対性の周辺

Ⅰ． $B_p=\sum_{k=1}^{n}k^p$（ベルヌーイの多項式）のある帰納的構成

以下は，筆者が平成 7 年に本校の研究紀要で報告したものを基本にして作成した。

$B_p(n)=\sum_{k=1}^{n}k^p$ は，$p=0,1,2,3$の場合から容易に推測できるように，nの$p+1$次式である。遠山啓著「数と式」（講談社）に倣って，この多項式をベルヌーイの多項式ということにする。

（注）「数と式」には，「今日普通ベルヌーイの多項式といわれているのは$B_p(n)$そのものではなく，その代わりに，$pB_{p-1}(n-1)$をp次のベルヌーイ多項式と名づけているが，本書はベルヌーイの最初の意味にかえることにした」とある。

当時教育課程が改訂され，改訂の目玉の一つとして，数学Ⅰ「個数の処理」において三角数・四角数が鳴り物入りで導入された。その頃を知るものにとっては，「あれは一体何だったのか？」

と思う程に，今はその名残りさえもない。「個数の処理」学習の目的は，個数を，Σ記号を用いて計算せずに図形的に処理して求めることにあった。$B_2(n),\mathrm{B}_3(n)$ の公式は，それぞれが $\frac{2n+1}{3}$ 個，$\frac{n(\mathrm{n}+1)}{2}$ 個の三角数に分割できることを教えている。筆者にとっては，数の三角数による分割は曲面(多様体)の三角形分割のようなイメージがあった。k^2,k^3 をどのように分割したらそのことが説明できるかを考えたことがヒントとなって，多項式 $B_p(n)$ の性質に関する興味ある定理を，その証明の方法を含めて，高校生にとってはより親しみの持てるものとして変容させることができたと思う。

以下では、$B_p(n)$ を単に B_p とおくことにする。

１．B_2,B_3 の三角数による分割

（１） $B_2=\frac{2n+1}{3}\left(\frac{n(\mathrm{n}+1)}{2}\right)$ の分割

$k^2=1+2+3+\cdots+(k-1)+k+(k-1)+\cdots+3+2+1$ であるから，$k=1\sim n$ を代入して，以下の図のように $1+2+\cdots+k$ と $k-1,k-2,\cdots 2,1$ を並べて，少し工夫する。

$(k=1)$	1	
$(k=2)$	$1+2$	$1_{+(n-1)}\quad((n-1)\quad+(n-2)+\cdots+3\quad+2+1)$
$(k=3)$	$1+2+3$	$2_{+(n-2)}\quad 1_{+(n-2)}\quad((n-2)+\cdots+3\quad+2+1)$
……	………	…… ……
$(k=n-1)$	$1+2+3+\cdots+(n-1)$	$n-2_{+2}\quad n-3_{+2}\quad\cdots\cdots\quad 1_{+2}\quad(2+1)$
$(k=n)$	$1+2+3+\cdots+(n-1)+n$	$n-1_{+1}\quad n-2_{+1}\quad\cdots\cdots\quad 2_{+1}\quad 1_{+1}\quad(1)$

$B_1=1+2+3+\cdots+n$ である。$S=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+\cdots(n-1))$ とおくと，上の図の右半分から，$3S=(n-1)B_1$ がわかる。したがって，$B_2=2S+B_1$ であるから，$3B_2=2(n-1)B_1+3B_1=(2n+1)B_1$ である。ゆえに示された。

すなわち、$B_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n$ である。

（２） $B_3=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(\mathrm{n}+1)}{2}\right)$ の分割

（１）の k^2 の分割 $k^2=(1+2+3+\cdots+k)+\{(k-1)+\cdots+2+1\}=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}$ をヒントにして，k^3 を k 個の $1+2+\cdots+k$ と $(k-1)+\cdots+2+1$ 個の k に分割する。即ち，

$$k^3=\{(1+2+\cdots+k)+\cdots+(1+2+\cdots+k)\}+\{(k+k+\cdots+k)+\cdots+(k+k)+k\}$$

$k=1\sim n$ を代入して，それらの順序を逆にして並べたものが次の図である。

$(k=1)$	1				
$(k=2)$	2	$2(1+2)$			
$(k=3)$	3	2×3	$3(1+2+3)$		
……	……	……	……	……	
$(k=n-1)$	$n-1$	$2(n-1)$	$3(n-1)$	……	$(n-1)(1+2+\cdots+(n-1))$
$(k=n)$	n	$2\times n$	$3\times n$	……	$(n-1)\times n\qquad n(1+2+\cdots+n)$

この図から，$B_3=(1+2+3+\cdots+n)B_1$　である。ゆえに示された。

すなわち，$B_3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}n^4+\dfrac{1}{2}n^3+\dfrac{1}{4}n^2$　である。

２．B_4～B_9の帰納的構成

１.（２）の図をヒントにして次のような図をつくる。

$(k=1)$	1^p				
$(k=2)$	2^p	$2(1^p+2^p)$			
$(k=3)$	3^p	2×3^p	$3(1^p+2^p+3^p)$		
…．	…．	…．	……．	…	
$(k=n-1)$	$(n-1)^p$	$2(n-1)^p$	$3(n-1)^p$	…．	$(n-1)(1^p+2^p+\cdots+(n-1)^p)$
$(k=n)$	n^p	$2\times n^p$	$3\times n^p$	…．	$(n-1)\times n^p$　　$n(1^p+2^p+\cdots+n^p)$

この図は，$1+2+3+\cdots+n$ 個の B_p が，$K_p=(1+2+\cdots+(k-1))k^p+k(1^p+2^p+\cdots+k^p)$ に，$k=1\sim n$ を代入して加えたものに等しいことを示している。

（１）B_4の構成

$p=2$ とする。１.（１）より，$K_2=\dfrac{(k-1)k}{2}k^2+k\left(\dfrac{1}{3}k^3+\dfrac{1}{2}k^2+\dfrac{1}{6}k\right)=\dfrac{5}{6}k^4+\dfrac{1}{6}k^2$

したがって，$B_1B_2=\dfrac{5}{6}B_4+\dfrac{1}{6}B_2$　　ゆえに，$B_4=B_2\left(\dfrac{6}{5}B_1-\dfrac{1}{5}\right)$

すなわち，$B_4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left(\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{5}n^5+\dfrac{1}{2}n^4+\dfrac{1}{3}n^3-\dfrac{1}{30}n$

（注）　k^4 を分割したのではなく，$5k^4+k^2$ を６個の K_2 に分割すると，B_4 ではなく，$5B_4+B_2$ が $6\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個の B_2 に分割されると考えたらどうだろうか.

（２）B_5の構成

$p=3$ とする。１.（２）より，$K_3=\dfrac{(k-1)k}{2}k^3+k\left(\dfrac{1}{4}k^4+\dfrac{1}{2}k^3+\dfrac{1}{4}k^2\right)=\dfrac{3}{4}k^5+\dfrac{1}{4}k^3$

したがって、$B_1B_3=\dfrac{3}{4}B_5+\dfrac{1}{4}B_3$　　ゆえに，$B_5=B_3\left(\dfrac{4}{3}B_1-\dfrac{1}{3}\right)$

すなわち，$B_5=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2\left(\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{6}n^6+\dfrac{1}{2}n^5+\dfrac{5}{12}n^4-\dfrac{1}{12}n^2$

（３）B_6～B_9について

（１），（２）の場合と全く同様であるから結果のみを紹介することにする。

(B_6)　$K_4=\dfrac{7}{10}k^6+\dfrac{1}{3}k^4-\dfrac{1}{30}k^2$　より，　$B_1B_4=\dfrac{7}{10}B_6+\dfrac{1}{3}B_4-\dfrac{1}{30}B_2$

したがって，　$B_6=B_2\left(\dfrac{12}{7}(B_1)^2-\dfrac{6}{7}B_1+\dfrac{1}{7}\right)$

すなわち，　$B_6=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left(\dfrac{12}{7}\cdot\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2-\dfrac{6}{7}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{1}{7}\right)$

$=\dfrac{1}{7}n^7+\dfrac{1}{2}n^6+\dfrac{1}{2}n^5-\dfrac{1}{6}n^3+\dfrac{1}{42}n$

(B_7)　$K_5=\dfrac{2}{3}k^7+\dfrac{5}{12}k^5-\dfrac{1}{12}k^3$　より，　$B_1B_5=\dfrac{2}{3}B_7+\dfrac{5}{12}B_5-\dfrac{1}{12}B_3$

したがって，　$B_7=B_3\left(2(B_1)^2-\dfrac{4}{3}B_1+\dfrac{1}{3}\right)$

すなわち，　$B_7=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2\left(2\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2-\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}+\dfrac{1}{3}\right)$

$=\dfrac{1}{8}n^8+\dfrac{1}{2}n^7+\dfrac{7}{12}n^6-\dfrac{7}{24}n^4+\dfrac{1}{12}n^2$

(B_8)　$K_6=\dfrac{9}{14}k^8+\dfrac{1}{2}k^6-\dfrac{1}{6}k^4+\dfrac{1}{42}k^2$　より，　$B_1B_6=\dfrac{9}{14}B_8+\dfrac{1}{2}B_6-\dfrac{1}{6}B_4+\dfrac{1}{42}B_2$

したがって，　$B_8=B_2\left(\dfrac{8}{3}(B_1)^3-\dfrac{8}{3}(B_1)^2+\dfrac{6}{5}B_1-\dfrac{1}{5}\right)$

すなわち，　$B_8=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left(\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^3-\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2+\dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{1}{5}\right)$

$=\dfrac{1}{9}n^9+\dfrac{1}{2}n^8+\dfrac{2}{3}n^7-\dfrac{7}{15}n^5+\dfrac{2}{9}n^3-\dfrac{1}{30}n$

(B_9)　$K_7=\dfrac{5}{8}k^9+\dfrac{7}{12}k^7-\dfrac{7}{24}k^5+\dfrac{1}{12}k^3$　より，　$B_1B_7=\dfrac{5}{8}B_9+\dfrac{7}{12}B_7-\dfrac{7}{24}B_5+\dfrac{1}{12}B_3$

したがって，　$B_9=B_3\left(\dfrac{16}{5}(B_1)^3-4(B_1)^2+\dfrac{12}{5}B_1-\dfrac{3}{5}\right)$

すなわち，　$B_9=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2\left(\dfrac{16}{5}\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^3-4\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2+\dfrac{12}{5}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{3}{5}\right)$

$=\dfrac{1}{10}n^{10}+\dfrac{1}{2}n^9+\dfrac{3}{4}n^8-\dfrac{7}{10}n^6+\dfrac{1}{2}n^4-\dfrac{3}{20}n^2$

３．多項式 B_p に関する定理とその証明

ベルヌーイの多項式 B_p の n の１次の項の係数を p 番目のベルヌーイ数という。先に紹介した「数と式」の中では，ベルヌーイ数さえ分かればベルヌーイの多項式が自然に求められることや，ベルヌーイの多項式の因数分解が紹介されている。その因数分解については，「２」における帰納的構成の結果から，次のように予想できる。

（定理）　多項式 B_p（$p\geq 2$）は，

（１）　p が偶数であるとき，多項式 B_2 を因数にもち，商は B_1 の $\dfrac{p-2}{2}$ 次式である。これを展開すると，n の $p+1$ 次式となり，展開式の n^{2i}（$2i\leq p$）の係数は，$2i=p$ のときは $\dfrac{1}{2}$，その他のときは 0 である。

（２） p が奇数であるとき，多項式 B_3 を因数にもち，商は B_1 の $\dfrac{p-3}{2}$ 次式である。これを展開すると，n の $p+1$ 次式となり，展開式の n^{2i-1}（$2i-1\le p$）の係数は，$2i-1=p$ のときは $\dfrac{1}{2}$，その他のときは 0 である。

（証明） 数学的帰納法を用いる。 p が偶数の場合を示す。奇数の場合についても同様である。

（ｉ） $p=2$ のときは，１.（１）より成り立つ。

（ii） p が偶数であるとして， p 以下の偶数に対して定理が成り立つとする。

このとき、 $p+2$ に対して定理が成り立つことを示す。

$2i\le p$ を満たすすべての i に対して，

$$B_{2i}=B_2\left(b_{2i}^{(1)}\left(B_1\right)^{i-1}+b_{2i}^{(2)}\left(B_1\right)^{i-2}+\cdots+b_{2i}^{(i)}\right)$$

$$=c_{2i}^{(1)}n^{2i+1}+\frac{1}{2}n^{2i}+c_{2i}^{(2)}n^{2i-1}+c_{2i}^{(3)}n^{2i-3}+\cdots+c_{2i}^{(i+1)}n\quad\left(b_{2i}^{(1)}\neq 0,c_{2i}^{(1)}\neq 0\right)$$

とする。このとき「２」において，

$$K_p=\frac{(k-1)k}{2}k^p+k\left(1^p+2^p+\cdots+\mathrm{k}^p\right)$$

$$=\frac{(k-1)k}{2}k^p+k\left(c_p^{(1)}k^{p+1}+\frac{1}{2}k^p+c_p^{(2)}k^{p-1}+c_p^{(3)}k^{p-3}+\cdots+c_p^{\left(\frac{p}{2}+1\right)}k\right)$$

$$=\left(c_p^{(1)}+\frac{1}{2}\right)k^{p+2}+c_p^{(2)}k^p+c_p^{(3)}k^{p-2}+\cdots+c_p^{\left(\frac{p}{2}+1\right)}k^2$$

と変形される。 $k=1\sim n$ を代入して辺々を加えると，

$$B_1B_p=\left(c_p^{(1)}+\frac{1}{2}\right)B_{p+2}+c_p^{(2)}B_p+c_p^{(3)}B_{p-2}+\cdots+c_p^{\left(\frac{p}{2}+1\right)}B_2$$

したがって，$\left(c_p^{(1)}+\dfrac{1}{2}\right)B_{p+2}=\left(B_1-c_p^{(2)}\right)B_p-c_p^{(3)}B_{p-2}-\cdots-c_p^{\left(\frac{p}{2}+1\right)}B_2$ ―― ①

である。右辺の第１項を B_1 の整式と考えて展開したとき，最高次の項は $b_p^{(1)}\left(B_1\right)^{\frac{p}{2}}B_2$ であり，これが全体の最高次の項でもある。したがって，①において $c_p^{(1)}+\dfrac{1}{2}\neq 0$ で，帰納法の仮定より $B_{2i}\left(2i\le p\right)$ は B_2 を因数にもつから， B_{p+2} は， B_2 を因数にもち，商は B_1 の $\dfrac{p}{2}=\dfrac{(p+2)-2}{2}$ 次式である。

また，この等式を n の整式と考えて右辺を展開する。第１項

$$\left(B_1-c_p^{(2)}\right)B_p=\left(\frac{n^2+n}{2}-c_p^{(2)}\right)\left(c_p^{(1)}n^{p+1}+\frac{1}{2}n^p+c_p^{(2)}n^{p-1}+c_p^{(3)}n^{p-3}+\cdots+c_p^{\left(\frac{p}{2}+1\right)}n\right)\ \text{―}\ ②$$

を展開したときの最高次の項は $\dfrac{1}{2}c_p^{(1)}n^{p+3}$ であり，これが全体の最高次の項でもある。

したがって， B_{p+2} は n の $p+3=(p+2)+1$ 次式である。

②の展開式の偶数次の項の和は $\dfrac{1}{2}\left(c_p^{(1)}+\dfrac{1}{2}\right)n^{p+2}+\dfrac{1}{2}\left(c_p^{(3)}n^{p-2}+\cdots+c_p^{\left(\frac{p}{2}+1\right)}n^2\right)$ である。

したがって，①において， B_{p+2} の $n^{2i}\left(2i\le p+2\right)$ の係数は， $2i=p+2$ のときは $\dfrac{1}{2}$，その他のときは 0 であることがわかる。（ｉ），（ii）より示された。

４．多項式 B_p の係数を決定する漸化式

係数を帰納的に決定する構造は，「３」における定理の証明の中から読み取ることができる。

定理の証明と同様， p が偶数の場合を考える。「３」において、関係式①を， B_1 の多項式と考えて，また n の多項式と考えて，それぞれを展開して係数を比較する。

このとき，係数 $b_p^{(1)} \sim b_p^{(\frac{p}{2})}, c_p^{(1)} \sim c_p^{(\frac{p}{2}+1)}$ から，係数 $b_{p+2}^{(1)} \sim b_{p+2}^{(\frac{p+2}{2})}, c_{p+2}^{(1)} \sim c_{p+2}^{(\frac{p+2}{2}+1)}$ をつくる漸化式が得られる。途中の計算を省略して、この関係式をそれぞれ行列表現すると次が得られる。

（１）等式①を B_1 の多項式として係数を比較

$$\left(c_p^{(1)}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} b_{p+2}^{(1)} \\ b_{p+2}^{(2)} \\ b_{p+2}^{(3)} \\ \vdots \\ \vdots \\ b_{p+2}^{(\frac{p}{2})} \\ b_{p+2}^{(\frac{p+2}{2})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_p^{(1)} & 0 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ b_p^{(2)} & b_p^{(1)} & 0 & & & & \vdots \\ b_p^{(3)} & b_p^{(2)} & b_{p-2}^{(1)} & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \cdot\cdot\cdot\cdot & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & 0 & \vdots \\ b_p^{(\frac{p}{2})} & b_p^{(\frac{p}{2}-1)} & b_{p-2}^{(\frac{p-2}{2}-1)} & \vdots & \vdots & b_4^{(1)} & 0 \\ 0 & b_p^{(\frac{p}{2})} & b_{p-2}^{(\frac{p-2}{2})} & \vdots & \vdots & b_4^{(2)} & b_2^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -c_p^{(2)} \\ -c_p^{(3)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -c_p^{(\frac{p}{2})} \\ -c_p^{(\frac{p}{2}+1)} \end{pmatrix}$$

（２）等式①を n の多項式として係数を比較

$$\left(c_p^{(1)}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} c_{p+2}^{(1)} \\ c_{p+2}^{(2)} \\ c_{p+2}^{(3)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ c_{p+2}^{(\frac{p+2}{2})} \\ c_{p+2}^{(\frac{p+2}{2}+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_p^{(1)} & 0 & 0 & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & 0 \\ c_p^{(2)} & \frac{1}{2} & c_p^{(1)} & 0 & & & & \vdots \\ c_p^{(3)} & 0 & c_p^{(2)} & c_{p-2}^{(1)} & 0 & & & \vdots \\ & & & & & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ & & & & & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & c_4^{(1)} & 0 \\ c_p^{(\frac{p}{2}+1)} & 0 & c_p^{(\frac{p}{2})} & c_{p-2}^{(\frac{p-2}{2})} & \vdots & \vdots & c_4^{(2)} & c_2^{(1)} \\ 0 & 0 & c_p^{(\frac{p}{2}+1)} & c_{p-2}^{(\frac{p-2}{2}+1)} & \vdots & \vdots & c_4^{(3)} & c_2^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -c_p^{(2)} \\ \cdot \\ \cdot \\ -c_p^{(\frac{p}{2})} \\ -c_p^{(\frac{p}{2}+1)} \end{pmatrix}$$

例えば B_8 が分かっているので、この行列を計算して B_{10} を求めてみよう。

（１）より、

$$\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} b_{10}^{(1)} \\ b_{10}^{(2)} \\ b_{10}^{(3)} \\ b_{10}^{(4)} \\ b_{10}^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5} & -\frac{8}{3} & \frac{12}{7} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{6}{7} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{15} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix} \qquad \therefore \quad \begin{pmatrix} b_{10}^{(1)} \\ b_{10}^{(2)} \\ b_{10}^{(3)} \\ b_{10}^{(4)} \\ b_{10}^{(5)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{48}{11} \\ -\frac{80}{11} \\ \frac{68}{11} \\ -\frac{30}{11} \\ \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

（2）より、

$$\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} c_{10}^{(1)} \\ c_{10}^{(2)} \\ c_{10}^{(3)} \\ c_{10}^{(4)} \\ c_{10}^{(5)} \\ c_{10}^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{15} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{7} & 0 & 0 \\ \frac{2}{9} & 0 & -\frac{7}{15} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{1}{30} & 0 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{1}{42} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{7}{15} \\ -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{30} \end{pmatrix} \quad \therefore \quad \begin{pmatrix} c_{10}^{(1)} \\ c_{10}^{(2)} \\ c_{10}^{(3)} \\ c_{10}^{(4)} \\ c_{10}^{(5)} \\ c_{10}^{(6)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{11} \\ \frac{5}{6} \\ -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{66} \end{pmatrix}$$

したがって、

$$B_{10} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\left(\frac{48}{11}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 - \frac{80}{11}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3 + \frac{68}{11}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{30}{11}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{5}{11}\right)$$

$$= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n$$

また行列の成分を比較してつくられる漸化式

$$\left(c_p^{(1)} + \frac{1}{2}\right)b_{p+2}^{(1)} = b_p^{(1)} \quad , \quad \left(c_p^{(1)} + \frac{1}{2}\right)b_{p+2}^{(2)} = b_p^{(2)} - c_p^{(2)}b_p^{(1)}$$

$$\left(c_p^{(1)} + \frac{1}{2}\right)c_{p+2}^{(1)} = \frac{1}{2}c_p^{(1)} \quad , \quad \left(c_p^{(1)} + \frac{1}{2}\right)c_{p+2}^{(2)} = \frac{1}{2}c_p^{(2)} + \frac{1}{4} - c_p^{(2)}c_p^{(1)}$$

（ただし、$b_2^{(1)} = 1, b_2^{(2)} = 0$ ； $c_2^{(1)} = \frac{1}{3}, c_2^{(2)} = \frac{1}{6}$）

などは容易に解くことができる。

５．具体的な B_p の係数一覧

最後に、これまでに得られた結果を一覧にして紹介する。規則性を読み取れば新しい発見もあると思うが、取りあえず報告を終えることにする。

（1）「$B_p = B_2$（または$(B_1)^2$）×（商）」における商（B_1 の多項式）の係数

	1	B_1	$(B_1)^2$	$(B_1)^3$	$(B_1)^4$
B_1					
B_2	1				
B_3	1				
B_4	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$			
B_5	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$			

	1	B_1	$(B_1)^2$	$(B_1)^3$	$(B_1)^4$
B_6	$\frac{1}{7}$	$-\frac{6}{7}$	$\frac{12}{7}$		
B_7	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	2		
B_8	$-\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$	$-\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3}$	
B_9	$-\frac{3}{5}$	$\frac{12}{5}$	-4	$\frac{16}{5}$	
B_{10}	$\frac{5}{11}$	$-\frac{30}{11}$	$\frac{68}{11}$	$-\frac{80}{11}$	$\frac{48}{11}$

（２） B_p（nの多項式)の係数

	n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}	n^{11}
B_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$									
B_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$								
B_3	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$							
B_4	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$						
B_5	0	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$					
B_6	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$				
B_7	0	$\frac{1}{12}$	0	$-\frac{7}{24}$	0	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$			
B_8	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{2}{9}$	0	$-\frac{7}{15}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$		
B_9	0	$-\frac{3}{20}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{7}{10}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	
B_{10}	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	-1	0	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$

Ⅱ．メネラウスの定理・チェバの定理の双対性

以下は，筆者が平成６年に本校の研究紀要で報告したものを基本にして作成した。

平成６年度から教科書の科目名が刷新され，「数学Ａ」の平面幾何では，メネラウスの定理・チェバの定理を学習することになった。２つの定理は，当時はほとんどの教科書で取り扱われていたが，現在では，東京書籍，実教出版のものに掲載されているのみである。何故なのか，その経緯については認識していないが，平成１９年度使用の改訂版では，再びほとんどに登場する。

２つの定理が双対の関係にあるということの意味と背景をもう少し正確に知りたいと思ったことが，かつてのノートをまとめた理由であったが，定理の証明はよく知られているので，以下では定理の“双対の周辺”について考えてみた。

１．定理の主張

平成１９年度改訂版数学Ａ教科書をみると，啓林館では，「三角形の性質」という節の「三角形の重心，外心，内心」に続く「研究」として２つの定理を紹介し，数研出版では，「三角形の性質」という節の節末の問題の中でメネラウスの定理を，それに続く研究としてチェバの定理を紹介している。東京書籍は「三角形と比」という節で「三角形の比の定理」として，これらの中では最も詳しく記述している。定理の主張は，教育的な配慮があって，いずれもいわゆる“完全な形”ではなく大同小異である。逆についての言及は，東京書籍がチェバの定理の逆を扱うのみで，かつての扱いと比較して重厚さにおいてかなりの差が見られる。

東京書籍は，チェバの定理，チェバの定理の逆，メネラウスの定理をこの順に紹介し，定理の主張は次のようにある。

（チェバの定理）

ΔABC の辺 BC,CA,AB 上にそれぞれ点 P,Q,R があり，

３直線 AP,BQ,CR が１点で交われば　$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$（が成り立つ）

（チェバの定理の逆）

ΔABC の辺 BC,CA,AB 上にそれぞれ点 P,Q,R があり，

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ が成り立てば，３直線 AP,BQ,CR は１点で交わる。

（メネラウスの定理）

ある直線が ΔABC の辺 BC,CA,AB，またはその延長と，

それぞれ点 P,Q,R で交われば　$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$（が成り立つ）

双対の議論には，デザルグの定理とその逆が重要な役割を果たしていると思うので，デザルグの定理を含めて，３つの定理とその逆の主張を小平邦彦著「幾何のおもしろさ」（岩波書店）を参考にして正確に記述する。

（メネラウスの定理とその逆）

ΔABC において，直線 BC,CA,AB 上にそれぞれ点 P,Q,R をとる。ただし，点 P,Q,R は ΔABC のいずれの頂点とも異なるものとする。

このとき，３点 P,Q,R が共線であるならば，P,Q,R は，３つともまたは１つが辺の延長上にあって，等式 $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ が成り立つ。この逆も成り立つ。

（チェバの定理とその逆）

ΔABC において，直線 BC,CA,AB 上にそれぞれ点 P,Q,R をとる。ただし，点 P,Q,R は ΔABC のいずれの頂点とも異なるものとする。

このとき，３直線 AP,BQ,CR が共点であるか，または互いに平行であるならば，P,Q,R は，３つともまたは１つが辺上にあって，等式 $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ が成り立つ。この逆も成り立つ。

（デザルグの定理とその逆）

ΔABC と $\Delta A'B'C'$ において，直線 AB と $A'B'$， BC と $B'C'$， CA と $C'A'$ の交点をそれぞれ P,Q,R とする。

このとき，３直線 AA',BB',CC' が共点であるならば，３点 P,Q,R は共線である。この逆も成り立つ。

２．射影幾何と双対の原理

(ユークリッド)平面上のすべての直線に無限遠点を付け加えて，互いに平行な直線はすべて同一の無限遠点を通るものと考える。また，平行ではない直線に付け加えた無限遠点の全体は，無限遠直線をつくると考える。この，無限遠点と無限遠直線を付け加えた新しい平面では，２直線は必ず交わるが，このように拡張された平面を射影平面といい，その平面上で構築される幾何を射影幾何という。ユークリッド幾何同様に，それは，点と点，点と直線，直線と直線の“結びつき”に始まる。平面上の射影幾何と双対の原理について,「新数学事典」(大阪書籍)には，要約すると次のようにある。

基本的な対象としての無定義元として，点，直線をとる。これらの間に成り立つ無定義関係として,“結びつく”をとる。同一直線に結びつく点の集合があるとき，これらの点は共線であるという。同一点に結びつく直線の集合があるとき，これらの直線は共点であるという。無定義な元と関係を対象物として，これに次の４つの公理を導入してつくられた体系が射影幾何である。

（結合の公理）

公理１　結びつかない点と直線が存在する。
公理２　すべての直線は，少なくとも異なる３点と結びつく。
公理３　任意の異なる２点に対し，これと結びつくただ１つの直線が存在する。
公理４　任意の異なる２直線に対し，これと結びつくただ１つの点が存在する。

例えば，これらの公理から次の定理が導かれることが分かる。

定理　　すべての点は，少なくとも異なる３直線と結びつく。

（証明）　点 P が公理１における点である場合は， P と結びつかない直線が存在する。公理２よりこの直線と結びつく３点を Q,R,S とする。このとき，公理３で定まる直線 PQ,PR,PS はすべて異なる。もし，直線 PQ,PR が同一の直線であるとすると，点 Q,R はともにこの直線と公理１の直線とに結びつく。これは公理４に矛盾する。

点 P が公理１における点でない場合， P が公理１の直線と結びつかない場合は同様である。結びつく場合は， P と，“公理１の点と公理１の直線上の P と異なる点に結びつく直線”とは結びつかないから再び同様に考えればよい。

（注意）　点からみても直線からみても同等の表現と考えて，“結びつく”という表現を用いているが，以下では，点と直線が結びつくとき，点は直線の上にある，あるいは直線は点を通る，ということにする。

結合の公理は，その表現の中にある用語の「点」と「直線」を入れ替えると，上の公理および定理のいずれかとなることが分かる。このことから次の重要な原理が導かれることが想像できる。

（双対の原理）

平面上の射影幾何では，ある命題が成り立てば，その命題にある用語の「点」と「直線」を入れ替えた命題もつねに成り立つ。このような命題を互いに双対的な命題という。

したがって，メネラウスの定理・チェバの定理の双対性は，厳密には射影幾何におけることであると理解できるが，ユークリッド幾何で考える場合には，２直線の交点が無限遠点である場合に対応する記述の部分に注意して言及すればよい。

３．双対性に注目した定理の記述

３つの定理を，双対性を意識して記述を改める。３直線が平行である場合は，無限遠点で交わるという意味で「３直線は共点」ということができるので，主張はそれぞれ次のようになる。

（メネラウスの定理とその逆）

異なる３直線の組(l_1,l_2,l_3)がある。直線l_2とl_3，l_3とl_1，l_1とl_2の上にある点をそれぞれA,B,Cとし，直線l_1,l_2,l_3の上にある点をそれぞれP,Q,Rとする。ただし，P,Q,RはA,B,Cのいずれとも異なるものとする。

このとき，３点P,Q,Rが共線であるならば，等式 $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=-1$ が成り立つ。この逆も成り立つ。

（チェバの定理とその逆）

異なる３点の組(A,B,C)がある。点BとC，CとA，AとBを通る直線をそれぞれl_1,l_2,l_3とし，点A,B,Cを通る直線をそれぞれp,q,rとする。ただし，p,q,rはl_1,l_2,l_3のいずれとも異なるものとする。

このとき，３直線p,q,rが共点であるならば，等式 $\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=1$ が成り立つ。この逆も成り立つ。（点P,Q,Rは，それぞれ直線l_1とp，l_2とq，l_3とrの上にある点である。）

（注意）線分の向きを考えて，３点K,L,Mが共線であるとき，Mが線分KLの内分点ならば$\dfrac{KM}{ML}>0$，外分点ならば$\dfrac{KM}{ML}<0$であると定義する。定理の主張は，双対性を意識して，結論の等式の±1に，３点P,Q,Rの配列を組み込んだ形となっている。

（デザルグの定理とその逆）

すべてが異なる３点の組(A,B,C)と３点の組(A',B',C')とがある。点BとC，CとA，AとBを通る直線をそれぞれl_1,l_2,l_3とし，点B'とC'，C'とA'，A'とB'を通る直線をそれぞれl_1',l_2',l_3'とする。さらに，点AとA'，BとB'，CとC'を通る直線をそれぞれa,b,cとし，直線l_1とl_1'，l_2とl_2'，l_3とl_3'の上にある点をそれぞれP,Q,Rとする。

このとき，３直線a,b,cが共点であるならば，３点P,Q,Rは共線である。この逆も成り立つ。

（「デザルグの定理とその逆」の双対）

すべてが異なる３直線の組(l_1,l_2,l_3)と３直線の組(l_1',l_2',l_3')とがある。直線l_2とl_3，l_3とl_1，l_1とl_2の上にある点をそれぞれA,B,Cとし，直線l_2'とl_3'，l_3'とl_1'，l_1'とl_2'の上にある点をそれぞれA',B',C'とする。さらに，直線l_1とl_1'，l_2とl_2'，l_3とl_3'の上にある点をそれぞれP,Q,Rとし，点AとA'，BとB'，CとC'を通る直線をそれぞれa,b,cとする。

このとき，３点P,Q,Rが共線であるならば，３直線a,b,cは共点である。この逆も成り立つ。

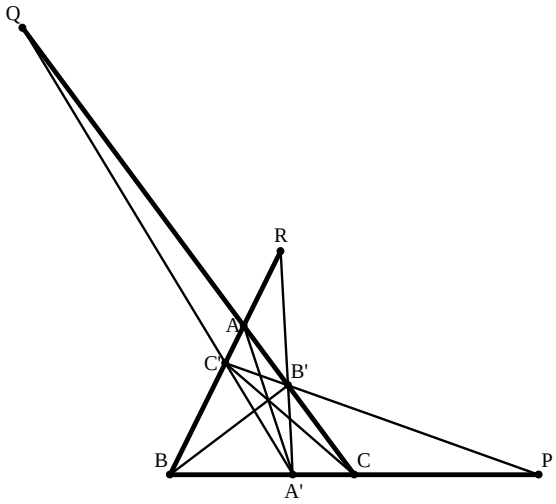
（注意）デザルグの定理の双対は，デザルグの定理の逆である。定理とその逆を含む主張は，双対をとればそれ自身になる。すなわち“自己双対”である定理と言える。

４．双対性の周辺

「３」では，メネラウスの定理・チェバの定理の双対が分かるように，またデザルグの定理の自己双対がわかるように定理の主張を記述してみた。このとき，以下のように考えれば，メネラウスの定理・チェバの定理は，デザルグの定理を介して，一方を認めると他方が成り立つことが分かる。「双対性」という表現により実感を持たせうるのではないかと考える。

メネラウスの定理とチェバの定理の仮定を認めることにする。例えば，ΔABC の辺 BC,CA,AB 上にそれぞれ３点 A',B',C' をとり，直線 AA',BB',CC' が共点であるとする。直線 BC と $B'C'$，CA と $C'A'$，AB と $A'B'$ の交点をそれぞれ P,Q,R とすると，デザルグの定理により３点 P,Q,R は共線であることが分かる。

このとき，一直線上に並ぶ４点の組 (B,A',C,P) は，ある特殊な射影を利用すれば調和点列であることが分かる。即ち，A',P は線分 BC を同じ比に内分，外分する点である。（入門　現代の数学[7] 具象から幾何学へ（日本評論社））



同様にして，４点の組 (C,B',A,Q) (B,C',A,R) も調和点列であるから，線分の向きを考えて，

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\left(-\frac{BP}{PC}\right)\cdot\left(-\frac{CQ}{QA}\right)\cdot\left(-\frac{AR}{RB}\right)$$

が成り立つ。

したがって，メネラウスの定理を認めると，

$\dfrac{BP}{PC}\cdot\dfrac{CQ}{QA}\cdot\dfrac{AR}{RB}=-1$ より，$\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=1$

が成り立つ。

つまり，ΔABC の辺上の３点 A',B',C' に対してチェバの定理の仮定を認めると，デザルグの定理により，メネラウスの定理の仮定が成立する辺の延長上の３点 P,Q,R をつくることができる。このとき，メネラウスの定理を認めればチェバの定理の結論を導くことができる。

逆に，チェバの定理と ΔABC の辺の延長上の３点 P,Q,R でメネラウスの定理の仮定を認める。辺 BC 上に点 A' をとり，CA と $A'R$ との交点を B'，AB と $A'Q$ との交点を C' として，直線 $B'C'$ が点 P を通るように点 A' を固定する。このとき，デザルグの定理の逆により，チェバの定理の仮定が成立する。その辺上の３点 A',B',C' をつくることができる。したがって，チェバの定理を認めれば，先程と同様に，調和点列の議論からメネラウスの定理の結論を導くことができる。

メネラウスの定理を認めてチェバの定理を導く，チェバの定理を認めてメネラウスの定理を導くプロセスには，場合に応じて，必ずしもデザルグの定理とその逆が介在していると考える必要はないが，以上はその典型である。

参考文献

［１］　遠山啓　著　　「数と式―代数入門」　講談社（１９８０）
［２］　小平邦彦　著　　「幾何のおもしろさ」　岩波書店（１９８５）
［３］　一松信・竹之内脩　編　　「新数学事典」(改訂増補)　大阪書籍（１９９１）
［４］　栗田稔　著　　「具象から幾何学へ」(入門　現代の数学[７])（１９８０）