積み木はどこまでずらすことが可能か

石川県立七尾高等学校
金岡　利宏

ねらい

幼い頃、積み木や空き缶を高く積み上げて遊んだ記憶がありますか。崩れないように、しかし次第に傾いていく中で、「そ～っ」と乗せる緊張感はとても貴重な経験です。童心に返り、今一度挑戦してみましょう。そして真理と向き合い、知識を総動員し理解しましょう。

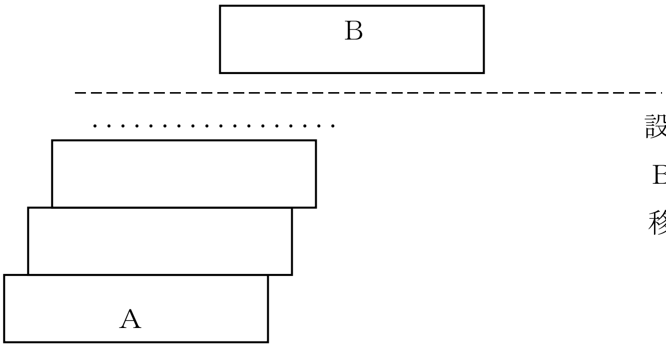
直方体の積み木を同じ方向へ少しずらしながら、どんどん高く積み上げていく。このとき、ある法則に従えば「無限に同じ方向へずらし続けることが可能」なのです。ん？この文章に書き損じはありません。無限にずらし続ける事が可能なのです。つまり、もとの場所からどんどん右へ移動しながら積み上げていくならば、非常に高く積みさえすれば、最上段での右へのずれ方は無限に可能だということです。直感的ですが、「積み木の横幅を１とすると最上段の積み木は右へ２とか３移動させるのが限度、それ以上ではどのように積んでも崩れますよ。」と言われれば、「なんだ、そうなのか。」と納得する人が多いようですが、そうではありません。しかし、いきなり現実を突きつけられ、「ある法則に従えば、最上段は無限に右に移動することができます。」と言われても、素直に「はい、そうですか。解りました。」と元気に返事ができる人はそれほど多くはないでしょう。「え～なぜ。そんなはずは・・・」と感じる人がほとんどではないでしょうか。しかし、真理は時として人間の想像や直感を超えるのです。

この教材は、無限における不思議な世界を少しでも多くの高校生に体験し、数学の魅力を実感してもらえる最も近道だと思い作りました。

目次

１．課題「積み木を一方向にずらしながら積み上げるとき、どこまでずらすことが可能か。」

設問内容を理解したら、実際に積み木を自分で積む前の予想と１０分間試行錯誤後の予想を次の①～⑦から選んで記入しよう。



設問.
ＢはＡに対してどこまで
移動して乗せることができるか？
（何段積んでもかまいません）

予想してみよう。

① Ａの長さの$\frac{1}{3}$倍

② Ａの長さの$\frac{1}{2}$倍

③ Ａの長さと同じ（１倍）

④ Ａの長さの$\sqrt{2}$倍

⑤ Ａの長さの２倍

⑥ Ａの長さの$\sqrt{8}$倍

⑦ Do as infinity

課題の説明だけによる予想

実際に１０分間試行錯誤した後での予想

２．積み木の発想の転換が必要

高校数学で頻繁に活用されているデカルトの発想では、未知数を文字に置き換え方程式を作成し問題を解く。つまり、問題文で使用されている数字の演算で答を導くことをあきらめ、解らない数値を文字で置き換え、全体の内容について筋道どおりの立式をする「逆転の発想」がここにある。

逆転の発想という面では同じように、積み木ではあるが積むことをあきらめることからはじめなくては試行錯誤も進まない。しかし、そこに気がつくことが実際に積んでみる意義であり、理論が進展する重要な一瞬となる。

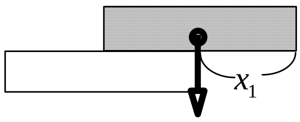
発想のポイント

上に積む　→　　下を増やす（倒れる限界まで移動後、下の段に滑り込ませる）

３．倒れない積み木の積み方の計算方法

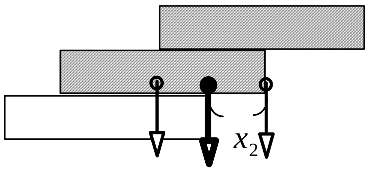
（直前の段から移動できる限界幅を $x_1, x_2, x_3, ...$ とおく、ただし積み木の長さを１とする）

①　全部で２段のとき、上の段１段分の重心が２段の右端にあるのが限界となる



１個の中心だから $x_1 = \dfrac{1}{2}$

②　全部で３段のとき、上の段２段分の重心が３段の右端にあるのが限界となる

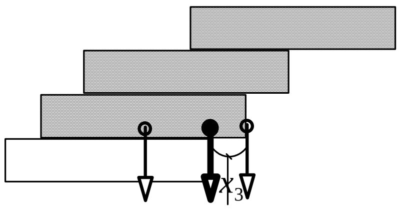


２段目の重心＝１段の重心

$1 \times \left(\dfrac{1}{2} - x_2 \right) = 1 \times x_2$　より　$\dfrac{1}{2} = 2x_2$

$x_2 = \dfrac{1}{4}$

③　４段のとき、３個分の重心が４段の右端にあるのが限界



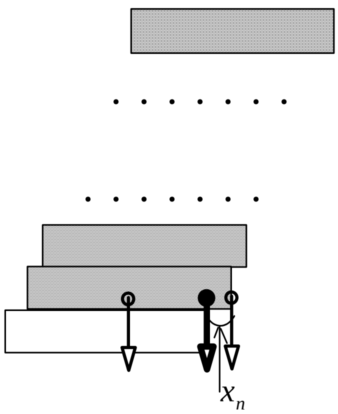
３段目の重心＝１段から２段の重心

$1 \times \left(\dfrac{1}{2} - x_3 \right) = 2 \times x_3$ より　$\dfrac{1}{2} - x_3 = 2x_3$

$\dfrac{1}{2} = 3x_3$　　$x_3 = \dfrac{1}{6}$

・・・・・・・・・・・・・・

④　ｎ段のとき、（ｎ－１）個分の重心がｎ個目の右端にあるのが限界



（ｎ－１）段目の重心＝１段から（ｎ－２）段の重心

$1 \times \left(\dfrac{1}{2} - x_n \right) = (n-1) \times x_n$

$\dfrac{1}{2} - x_n = (n-1)x_n$

$\dfrac{1}{2} = nx_n$

$x_n = \dfrac{1}{2n}$

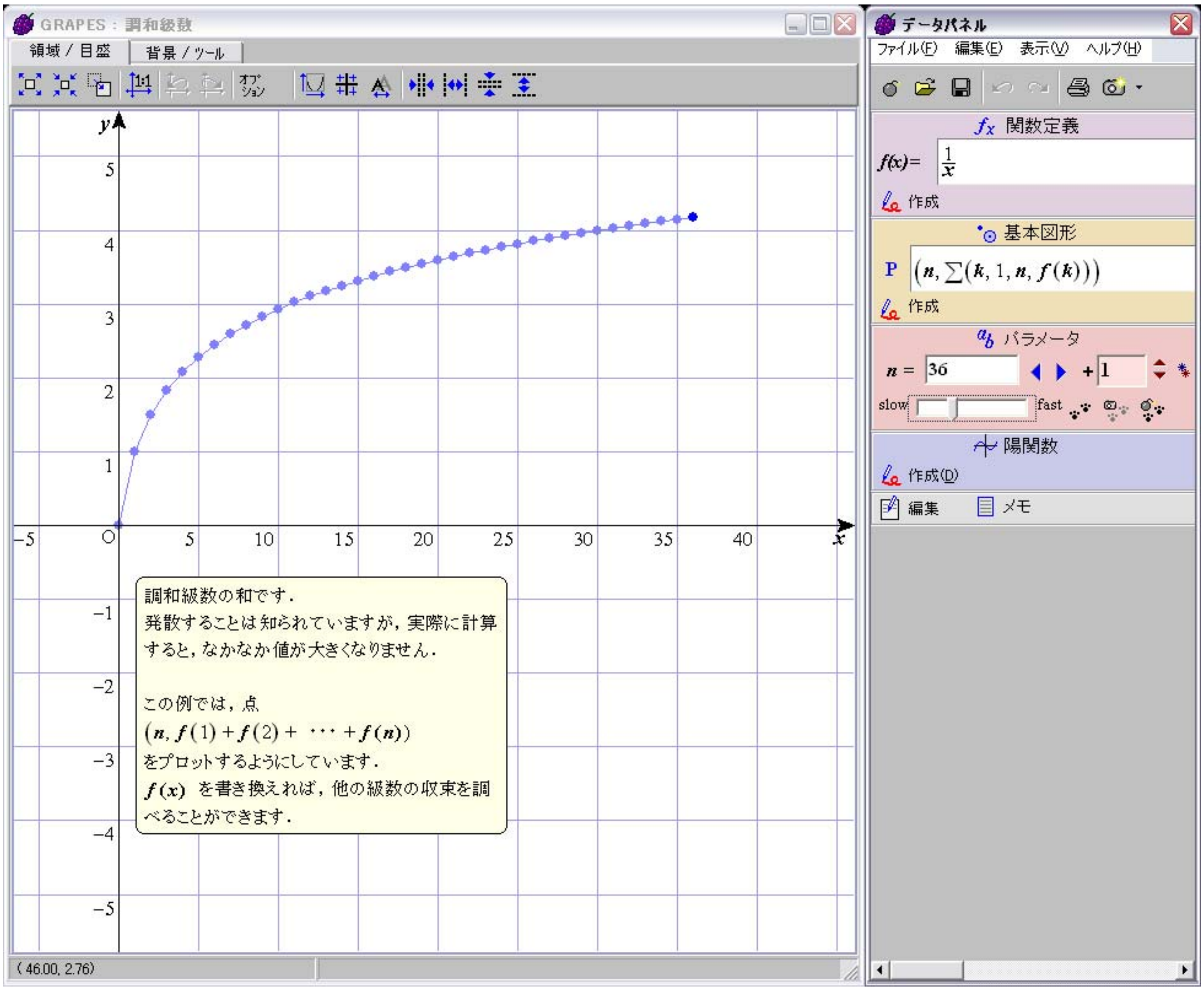
【まとめ】つまり、崩れない限界　$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{2} \log n = \infty$

一般項 a_n はゼロに収束するが、和は発散する。

結論‥積み木の再上段は無限大にずらして乗せることが可能である。

4．$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\lim_{n\to\infty}\log n=\infty$ の意味

グラフ作成ソフト Grapes で逆数の和を表現し、発散することを確認する。



５．表計算での仮想実験

表計算ソフトで１段分のずれ、２段分のずれが可能になるための高さは何段であるかを求めてみよう。

Excel でシグマを計算してみよう

n	1/n	Σ１／n	
2	0.5	0.5	
4	0.25	0.75	
6	0.166666667	0.916666667	
8	0.125	1.041666667	←１段分のずれ
10	0.1	1.141666667	
12	0.083333333	1.225	
14	0.071428571	1.296428571	
16	0.0625	1.358928571	
18	0.055555556	1.414484127	
20	0.05	1.464484127	
22	0.045454545	1.509938672	
24	0.041666667	1.551605339	
26	0.038461538	1.590066878	
28	0.035714286	1.625781163	
30	0.033333333	1.659114497	
32	0.03125	1.690364497	
34	0.029411765	1.719776261	
36	0.027777778	1.747554039	
38	0.026315789	1.773869829	
40	0.025	1.798869829	
42	0.023809524	1.822679352	
44	0.022727273	1.845406625	
46	0.02173913	1.867145756	
48	0.020833333	1.887979089	
50	0.02	1.907979089	
52	0.019230769	1.927209858	
54	0.018518519	1.945728377	
56	0.017857143	1.963585519	
58	0.017241379	1.980826899	
60	0.016666667	1.997493565	
62	0.016129032	2.013622598	←２段分のずれ
64	0.015625	2.029247598	
66	0.015151515	2.044399113	
68	0.014705882	2.059104995	
70	0.014285714	2.07339071	
72	0.013888889	2.087279598	
74	0.013513514	2.100793112	
76	0.013157895	2.113951007	
78	0.012820513	2.126771519	
80	0.0125	2.139271519	
82	0.012195122	2.151466641	

６．Log は発散する最小和として学習しているが、さらに発散と収束の研究を進めた分野がある。
それは、オイラーのζ（ゼータ）関数

オイラーの業績… $\sum \frac{1}{p}$ （pは素数）や $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ をゼータ（ζ）関数として定義し,

収束と発散の狭間やその収束値について研究した。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \log n \quad \to \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{4} \quad \to \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \to \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

（発散）　（収束）　（収束）　（収束）

間引きをすることで収束条件を研究　（発想　素数のみの和など）

６．１　高校で学習する微分と積分の関係

$$0 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow x$$

$$1 \leftrightarrow x \leftrightarrow \frac{1}{2}x^2$$

$$2x \leftrightarrow x^2 \leftrightarrow \frac{1}{3}x^3$$

$$3x^2 \leftrightarrow x^3 \leftrightarrow \frac{1}{4}x^4$$

$$nx^{n-1} \leftrightarrow x^n \leftrightarrow \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

三角関数

$$\cos x \leftrightarrow \sin x \leftrightarrow -\cos x$$

$$-\sin x \leftrightarrow \cos x \leftrightarrow \sin x$$

指数関数

$$(\log a)a^x \leftrightarrow a^x \leftrightarrow \frac{a^x}{\log a}$$

対数関数

$$e^x \leftrightarrow e^x \leftrightarrow e^x$$

$$\frac{1}{x} \leftrightarrow \log x \leftrightarrow x\log x - x$$

$$-\frac{2}{x^2} \leftrightarrow \frac{1}{x} \leftrightarrow \log x$$

$$-\frac{3}{x^3} \leftrightarrow \frac{1}{x^2} \leftrightarrow -\frac{1}{x}$$

６．２　これらの関数を無限数列の和で表す。

Talor展開（級数）$\cdots n$ 回微分可能である関数に対して、平均値の定理の拡張

$$f(x)=f(a)+(x-a)\frac{f'(a)}{1!}+(x-a)^2\frac{f''(a)}{2!}+(x-a)^3\frac{f'''(a)}{3!}+\cdots\cdots+(x-a)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+R_n(x)$$

$R_n=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$　　$(a<c<b)$　　となる c が少なくとも１つ存在する。

R_n をラグランジュの剰余項というが、今回はこの極限は0 であるとする。

Talor展開における $a=0$ のものを**Maclaurin**展開という。

$$f(x)=f(0)+f(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+R_n(x)$$

例題６．１（代表的な例）

① $e^x=1+\dfrac{1}{1!}x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots$

② $\cos x=\cos 0+(-\sin 0)x+\dfrac{-\cos 0}{2!}x^2+\dfrac{\sin 0}{3!}x^3+\cdots=1-\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{4!}x^4-\dfrac{1}{6!}x^6+\cdots$

③ $\sin x=\sin 0+(\cos 0)x+\dfrac{-\sin 0}{2!}x^2+\dfrac{-\cos 0}{3!}x^3+\cdots=+\dfrac{1}{1!}x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5-\dfrac{1}{7!}x^7\cdots$

④ $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\quad(-1<x<1)$

⑤ $\log(1+x)=x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3-\dfrac{1}{4!}x^4+\cdots\quad(-1\le x\le 1)$

７．数学における最も美しい公式といわれているオイラーの公式

①の公式で x に ix を代入する

②と③を代入すると　　$e^{ix}=\cos x+i\sin x$

Pr.)　$x=a+b$

$$\begin{aligned}e^{ix}=e^{i(a+b)}=e^{ia}e^{ib}&=(\cos a+i\sin a)(\cos b+i\sin b)\\&=\cos a\cos b+i\cos a\sin b+i\sin a\cos b-\sin a\sin b\\&=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)+i(\sin a\cos b+\cos a\sin b)\\&=\cos(a+b)+i\sin(a+b)\\&=\cos x+i\sin x\end{aligned}$$

となる。この結果に $x=\pi$ を代入すると $e^{i\pi}=-1$

練習７　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{x}$ を数列に展開してみよう。

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots$$

より

$$\frac{1-e^x}{x}=\frac{1-\left(1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+\cdots\right)}{x}$$

$$=\frac{-x-\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3-\frac{1}{4!}x^4-\cdots}{x}$$

$$=-1-\frac{1}{2!}x-\frac{1}{3!}x^2-\frac{1}{4!}x^3-\cdots$$

よって極限値は　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{x}=-1$

ロピタルの定理による別解

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ より $$\lim_{x\to0}\frac{1-e^x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-e^x\right)'}{x'}=\lim_{x\to0}\frac{-e^x}{1}=-1$$

８．成果

・直感では解決できない真理に対して、積み木の実物やコンピュータによる計算結果で少しずつ納得していくことで印象を明確に残せるようである。

・積み木の結論を理解した上で、最も発散率の低い無限大の発散を発散しない極限値の存在する世界へと間引きする方法としてのζ関数を紹介し、オイラーの公式の証明へと進むと証明内容が難解であったとしても、その答の単純で簡潔なことに驚いた様子でした。それぞれの数字や記号は世界中の様々な場所で、様々な時代に発見されたにも関わらず、この短い式の中で見事に融合された公式なので、高校生で体験することはとても意義のある体験のようでした。

９．生徒の感想

・無限大まで積める結論には、常識では納得できなかったが、数学的に証明できてよかった。

・数学で感動した。

・数学と物理が繋がっていておもしろいと感じた。

・数学に美しさを感じた。

・物理と数学の関連性を考えるようになった。

・数学の世界の奥深さを感じ、さらに数学に興味を持てた。

・log の微分の意味がわかったので、間違うことはなくなった。

・数学の難しさを思い知ったが、ある意味ではおもしろいと思えた。

・世界にはすごい天才がいる。凡人には考えられない。学問は奥が深い。

参考文献

[1]　理系への数学、現代数学社、２００５年３月号　積み木と調和級数、西山　豊