グラフを描くテクニック

金沢市立工業高等学校
宮　田　毅　一　郎

ねらい

関数を学んでいく上で，いろいろな関数の性質を理解し，さらに学習を深め数学や物理，また工業の専門科目でも学び，利用しているであろう．その際にグラフを描くことが不可欠になる．

関数のグラフの式が与えられていて，グラフの概形を調べるとき，微分して増減表を作るというのは大変労力が必要です．微分が有効なのは，局所（部分）の増減や凹凸を調べる場合で，その前に

①大づかみにグラフの概形をつかみ，②微分という手段を用いて細部を調べる

というのが，グラフを描く望ましい方法でしょう．

そこで，グラフをより正しく描けることを目標に本テーマである「グラフを描くテクニック」を紹介したいと考えています.

本テーマの考察により以下，微分の前に概形を調べるにあたり，簡単な関数を例に概形を描くための手段にはどのようなものがあるのか，特に，①の段階では何をやったらよいのか考えていきます.

グラフの概形を調べる方法はいくつかありますが，ここでは頻度の高いものを扱います.

以下，本テーマの概要を述べると

前半は２次関数，３次関数および４次関数のグラフの概形

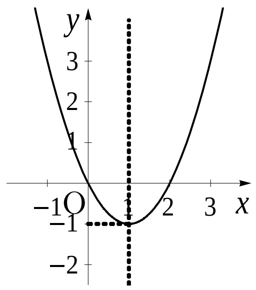
後半は分数関数や漸近線の考察，および２つの関数の和や積の形で表されるものの概形

を扱います．その際には，整関数はもとより指数・対数関数・三角関数等の基本的な関数のグラフの概形は覚えて下さい.

以下，今まで学んだ事柄の復習を通し，その応用についても関心を持つきっかけになれば幸いです.

目次

1.　２次関数のグラフ



<u>復習問題</u>　$f(x)=x^2-2x$　のグラフを書け．

$\boxed{解答}$　$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$

軸は直線 $x=1$，頂点は $(1,-1)$ の右図の放物線となる．

$\boxed{復習事項}$　～２次関数のグラフの書き方～

放物線を描く手順の確認

① 一般形から標準形へ変形

② 軸の方程式を求める

③ 頂点の座標を求める

④ 点をプロットする

⑤ プロットした点に沿って曲線を滑らかに描く

$\boxed{例}$　$f(x)=x^2-2x$　の増減を調べよ．

$\boxed{解答}$　$f(x)=x^2-2x$　を微分すると

$f'(x)=2x-2=2(x-1)$

$x>1$　のとき　$f'(x)>0$，$x<1$　のとき　$f'(x)<0$

である．これより，増減表を作ると，次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

したがって，関数　$f(x)=x^2-2x$　は

区間 $x>1$ で減少，区間 $x<1$ で増加

※　増減表とグラフを見て気付いたことを書いてみよう．

2.　３次関数のグラフ

$\boxed{例}$　関数　$f(x)=x^3-3x+1$　の増減を調べよ．

$\boxed{解答}$　$f(x)=x^3-3x+1$　を微分すると

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ の解は　$x=-1,1$

$x<-1$，$1<x$　のとき　$f'(x)>0$，$-1<x<1$　のとき　$f'(x)<0$

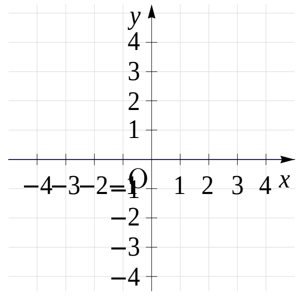
である．これをまとめると，次の表（増減表）になる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$

したがって，関数　$f(x)=x^3-3x+1$　は

区間　$x<-1$，$1<x$ で増加，区間　$-1<x<1$　で減少 $\boxed{終}$

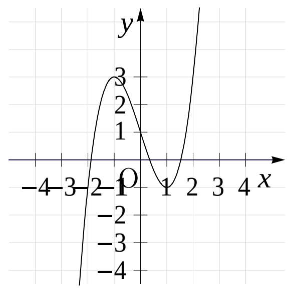
※　前の例より　グラフの概形を予想してみよ．



<u>問題</u>　次の表を完成させてグラフを書いてみよ．

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$									

解答　右図のようになる．



@グラフの概形の予想は当たっていましたか？

3．関数の極大・極小

３次関数や他の関数に対して，２次関数で扱った最大・ 最小という概念に近いものを導入します．

<u>定義</u>　関数はある区間で定義された連続関数とする．

$y=f(x)$ が $x=a$ を境にして，増加の状態から減少の状態に移るとき， $y=f(x)$ は $x=a$ で**極大**になるといい， $f(a)$ を**極大値**という．

また， $y=f(x)$ が $x=a$ を境にして，減少の状態から増加の状態に移るとき， $y=f(x)$ は $x=a$ で**極小**になるといい， $f(a)$ を**極小値** という．

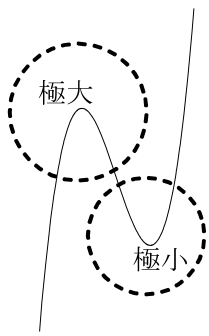
※　極大値は極めて狭い範囲での**最大値**，極小値は極めて狭い範囲での**最小値**と考えることができる．

極大・極小

$f(a)=0$ となる $x=a$ を境にして

（１）　$f'(x)$ が正から負に変われば　$f(a)$ は**極大値**

（２）　$f'(x)$ が負から正に変われば　$f(a)$ は**極小値**



例　関数　$f(x)=x^3-3x+1$　の極値を求め，グラフをかけ．

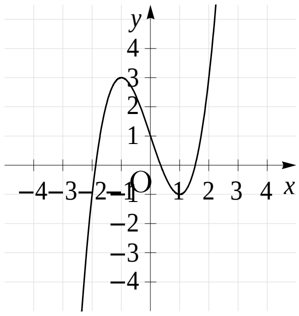
解答　$f(x)=x^3-3x+1$　を微分すると

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ の解は　$x=-1,1$

これをまとめると，次の表（増減表）になる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$



したがって，関数　$f(x)=x^3-3x+1$　は

$x=-1$　のとき極大となり，極大値3，

$x=1$　　のとき極小となり，極小値-1

また，この関数のグラフは右図のようになる．　終

確認事項　～３次関数のグラフの書き方～

３次関数を描く手順の確認

① 導関数を求める

② 増減表を作る

③ 極点（極値：極大値・極小値）を調べる

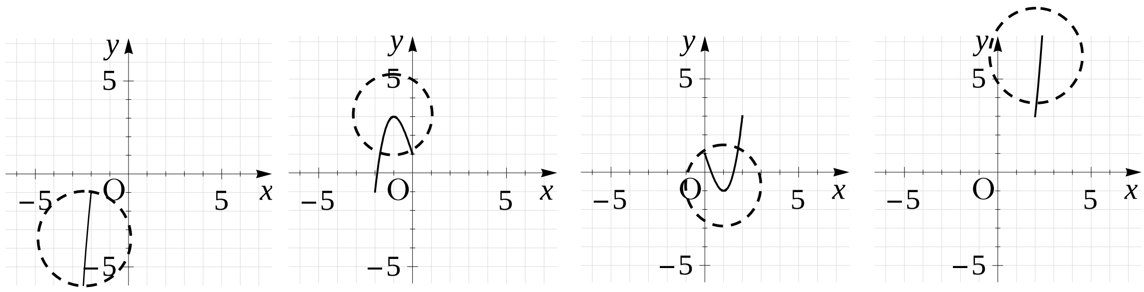
④ 点をプロットする

⑤ プロットした点に沿って曲線を滑らかに描く

4.　３次関数のグラフの特徴

関数　$f(x)=x^3-3x+1$　のグラフを例に３次関数の特徴を考えてみましょう．

①



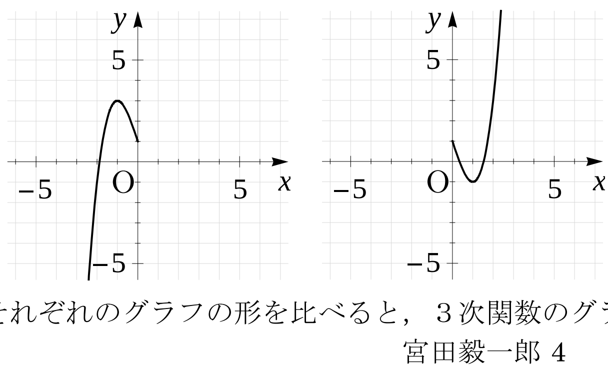
それぞれのグラフの形を比べると

（３次関数）＝（**１次関数**）＋（**２次関数**）

と考えることができる．

（もちろん，１次関数と２次関数を加えても３次関数にはなりませんし，グラフもそれぞれ正確には１次関数，２次関数にはなりません.）

②



それぞれのグラフの形を比べると，３次関数のグラフは**点対称**な図形であることが分かる．

まとめ

① グラフは変曲点で点対称になる．（数学Ⅱの分野では変曲点は扱いません）

② ３次関数も，変曲点と極点を押さえれば増減表はなくても描ける．変曲点も「極大点，極小点を結ぶ線分の中点で点対称である」ことを利用して，その点を基準にしてグラフを考え，片方を描けば，もう片側も仕上がる．

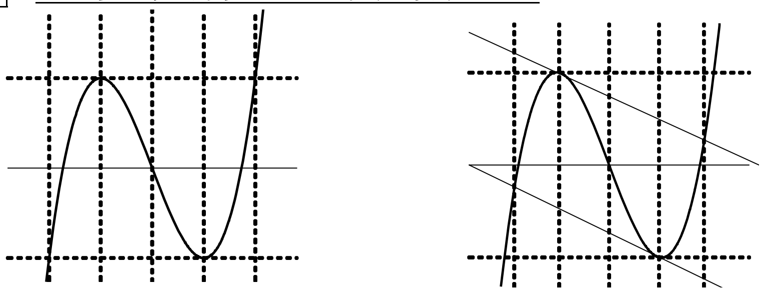
@ 増減表から３次関数のグラフの概形を求めることだけが唯一の方法でないことがわかりましたか.

$\boxed{\text{参考}}$ 関数 $y=f(x)$ が２回微分可能であり，$x=a$ の前後で曲線の凹凸が変わる（$f''(x)$ の符号が変化する）とき，点 $(a, f(a))$ を曲線 $y=f(x)$ の**変曲点**といいます.

点 $(a, f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点ならば $f''(a)=0$ ですが，$f''(a)=0$ であるからといって，点 $(a, f(a))$ が曲線の変曲点であるとは限りません.

すなわち，$f''(a)=0$ は，点 $(a, f(a))$ が曲線 $y=f(x)$ の変曲点であることの必要条件ですが，十分条件ではありません.

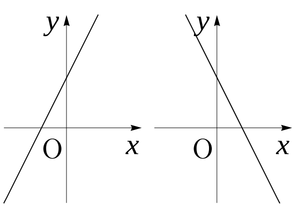
$\boxed{\text{参考}}$ ３次関数の等間隔性

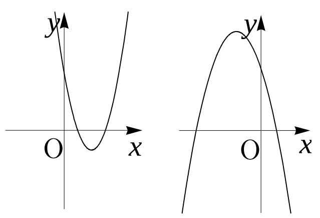


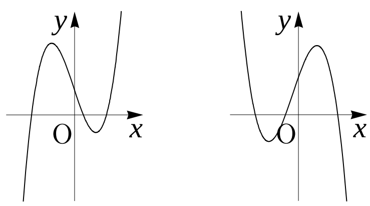
5. ４次以上の関数のグラフの概形

４次以上の関数のグラフの概形を予想せよ.

(1) １次関数　　(2) ２次関数　　(3) ３次関数







(4) ４次関数　　(5) ５次関数

実際に４次関数のグラフの場合を調べて見ましょう．

問題　関数　$f(x)=x^4-4x^2$　の増減，極値を調べて，グラフをかけ．

$\boxed{\text{解答}}$　$f(x)=x^4-4x^2$　を微分すると

$f'(x)=4x^3-8x=4x(x^2-2)$

$=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$ の解は　$x=\pm\sqrt{2},0$

これをまとめると，次の表（増減表）になる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗	-1	↘	-4	↗

したがって，関数 $f(x)=x^4-4x^2$ は

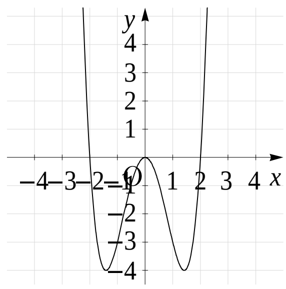
区間 $-\sqrt{2}\leqq x\leqq 0$　および　$\sqrt{2}\leqq x$　で増加

区間 $\sqrt{2}\leqq x$　および　$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ で減少

$x=0$　のとき極大となり，極大値 -1，

$x=\pm\sqrt{2}$ のとき極小となり，極小値 -4

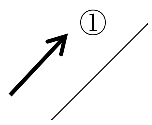
また，この関数のグラフは右図のようになる．　$\boxed{\text{終}}$



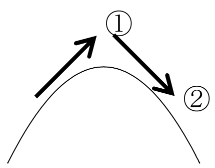
＠グラフの概形の予想は当たっていましたか？

覚え方

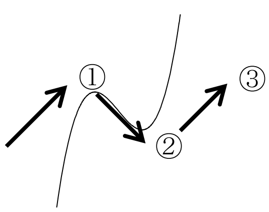
(1) １次関数



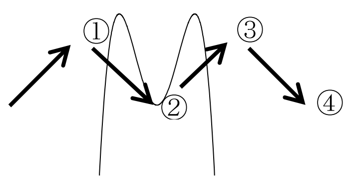
(2) ２次関数



(3) ３次関数



(4) ４次関数



(5) ５次以上

$\boxed{\text{参考}}$

(1)　２次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ のグラフは，つねに対称軸 $\left(x=-\dfrac{a}{2}\right)$ をもつ．

(2)　3次関数のグラフ $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は，つねに点対称の中心 $\left(-\dfrac{a}{3}, \dfrac{2a^3}{27}-\dfrac{bc}{3}+c\right)$ をもつ.

(3)　4次関数のグラフ $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ は， $a^3-4ab+8c=0$ ときに限り線対称であり，

その対称軸は $x=-\dfrac{a}{4}$

6. 関数のグラフ

整式以外の関数のグラフについて扱う．整式の場合より調べることも多く，特に分数関数などは漸近線も考える必要がある．以下，調べることをあげておく.

1．関数のグラフの書き方

関数 $y=f(x)$ のグラフを書くには，関数に応じて次のことを調べる.

(1)曲線の存在する範囲
(2)対称軸や対称の中心，周期性の有無
(3)座標軸との交点など，容易にわかる曲線上の点
(4)関数の増減と極大・極小
(5)曲線の凹凸と変曲点
(6)漸近線の有無と曲線との関係
(7)その他，不連続点，また，特別な点における y や y' の値

2．漸近線の求め方

(1)　y 軸に平行な漸近線：

$\lim_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty$　または　$\lim_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty$　のとき， $x=a$ は $y=f(x)$ の漸近線

(2)　x 軸に平行な漸近線：

$\lim_{x\to\infty} f(x)=c$　または $\lim_{x\to-\infty} f(x)=c$　のとき $f'(x)>0$ は　$y=f(x)$ の漸近線

(3)　y 軸に平行でない漸近線：

$\lim_{x\to\pm\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$　ならば　$y=ax+b$ は　$y=f(x)$ の漸近線

$$\left(a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-a)\right)$$

7. グラフの概形

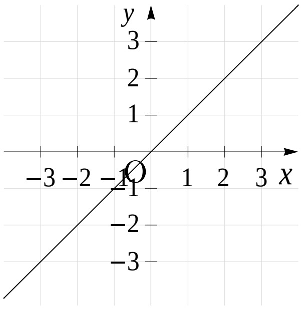
今まで通り，微分する前にグラフの概形を描いてみよう.

例　次のグラフの概形を計算しないで式の意味を考えてかけ.

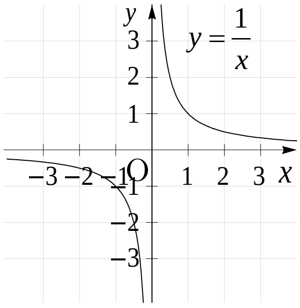
(1)　$y=x+\dfrac{1}{x}$

[考え方]と$\boxed{\text{解答}}$

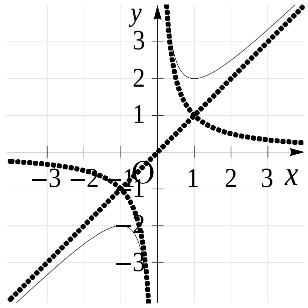
$y=x+\dfrac{1}{x}$ は $y=x$ と $y=\dfrac{1}{x}$ を加えたものだから，[図１]と[図２]を合わせて[図３]のようになる．



［図１］



［図２］



［図３］

（例えば，$x=1$ では $y=1(=x)$ と $y=1=\left(\dfrac{1}{x}\right)$ を加えるので，$y=x+\dfrac{1}{x}$ の y 座標は２になる）

また，$y=x+\dfrac{1}{x}$ のグラフは

１）$x\to\pm\infty$ のとき $\dfrac{1}{x}\to 0$ である．

よって，$x\to\pm\infty$ のとき，$y=x+\dfrac{1}{x}$ のグラフはほとんど $y=x$ のグラフに等しい．

２）$x\to 0$ のとき，$y=x+\dfrac{1}{x}$ のグラフはほとんど $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフに等しい．

３）原点に関して点対称である．（$y=x+\dfrac{1}{x}$ は奇関数である）

※$x>0$ のとき，相加・相乗平均の関係より

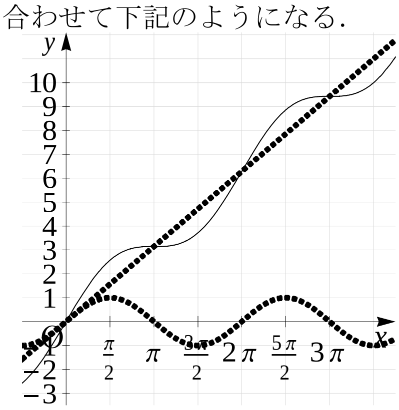
$$x+\frac{1}{x}\geqq\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$$

も併せて使えるとよい．

⑵ $y=x+\sin x(0\leqq x\leqq 2\pi)$

[考え方]と$\boxed{\text{解答}}$

$y=x+\sin x$ は $y=x$ と $y=\sin x$ を加えたものだから，合わせて下記のようになる．



（例えば，

１）$x=1$ では $y=0(=x)$ と $y=0(=\sin x)$ を加えるので，
$y=x+\sin x$ の y 座標は０になる）

２）$x=\pi$ では $y=\pi(=x)$ と $y=0(=\sin x)$ を加えるので，
$y=x+\sin x$ の y 座標は π になる）

３）$x=2\pi$ では $y=2\pi(=x)$ と $y=0(=\sin x)$ を加えるので，
$y=x+\sin x$ の y 座標は 2π になる）

これらのように式の意味を考えれば，すぐにグラフの概形が分かるものが多い．

8.　漸近線の考察

グラフの概形が予想できるということは非常に重要なことである．しかし，きちんと計算しないとわかりにくいものもある．その際に漸近線も考える必要があるものもある．

例　$y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ のグラフをかけ．

解答　$y'=\dfrac{(2x)'\cdot(x^2+1)-2x\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

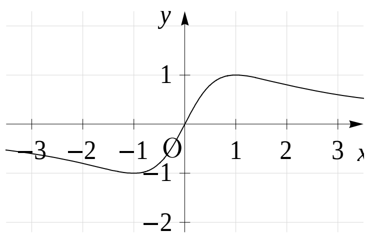
$=\dfrac{-2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$

ここで，

$$\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0\end{cases}$$

より，増減表からグラフは次のようになる．



注意　今のような問題の場合，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$ と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^2+1}=0$ を調べなければならない．

増減表から「$x>1$ のとき，$y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ は減少する」ということはわかるが，どこまで減少するか分からない．増減表からは $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ や $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ がわからないので，増減表とは別に $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ や $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ も調べなければならない．

例　$y=\dfrac{x^2}{x-2}$ のグラフをかけ．

[考え方]　$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ において，（分母の $g(x)$ の次数）≦（分子の $f(x)$ の次数）ならば，

（分母の $g(x)$ の次数）＜（分子の $f(x)$ の次数）となるまで分子の次数を下げる．

解答　$y=\dfrac{x^2}{x-2}=x+2+\dfrac{4}{x-2}$

$y'=1-\dfrac{4}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-2)^2-4}{(x-2)^2}$

$=\dfrac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	0	$\searrow$		$\searrow$	8	$\nearrow$

また，$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x-2}=0$，$\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{x-2}=0$　より，$x\to\pm\infty$ のとき

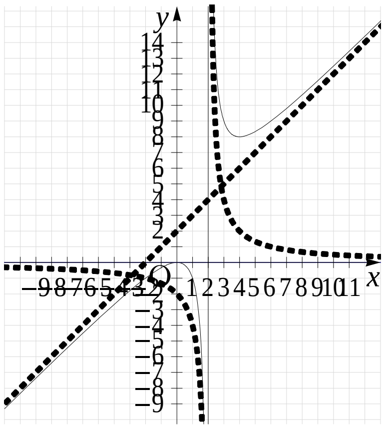
$$y=\frac{x^2}{x-2}=(x+2)+\frac{4}{x-2}\quad は\quad y=x+2\quad に近づく．\cdots（※）$$

ここで，

$$\begin{cases}\lim_{x\to2+0}\frac{4}{x-2}=\infty\\ \lim_{x\to2-0}\frac{4}{x-2}=-\infty\end{cases}\quad より\quad \begin{cases}\lim_{x\to\infty}\left(x+2+\frac{4}{x-2}\right)=4+\infty=\infty\quad\cdots①\\ \lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\frac{4}{x-2}\right)=4-\infty=-\infty\cdots②\end{cases}$$

①　，②と（※）と増減表を考え，

②　グラフは次のようになることがわかる．



9. 関数の積

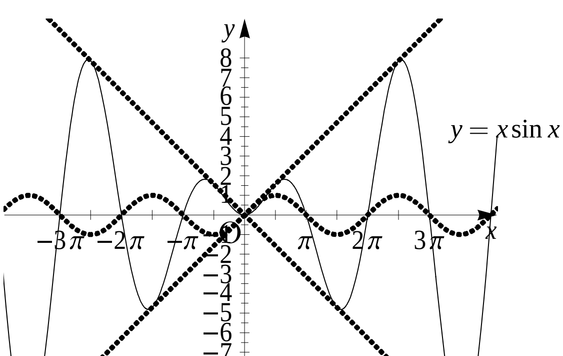
関数の和の形で表されたものを扱っていたが，ここでは積の形で表されたものを少し扱いたい．そこで，代表例として，周期関数 $\sin x,\cos x$ の積を取り上げる．周期関数 $\sin x,\cos x$ などの積は大まかに言えば「周期的」になる．

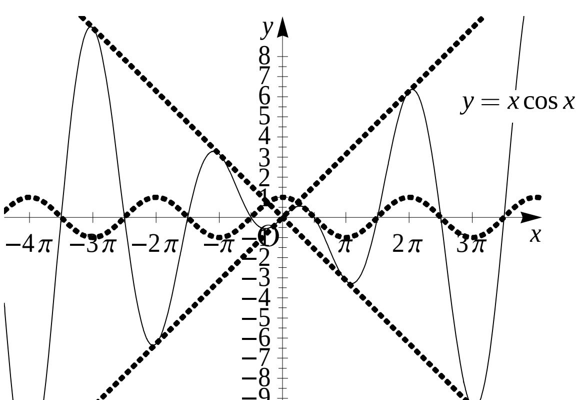
(1)　$y=\sin x, y=\cos x$

$y=\sin x$ と $y=\cos x$ は　$y=x, y=-x$ のグラフに挟まれた範囲で周期的にグラフを描く．

$y=0$ となるのは，$x=0,\pm\pi,\pm2\pi,\cdots$ のときで $-1\leqq\sin x\leqq1$，$-1\leqq\cos x\leqq1$ で振動するので，

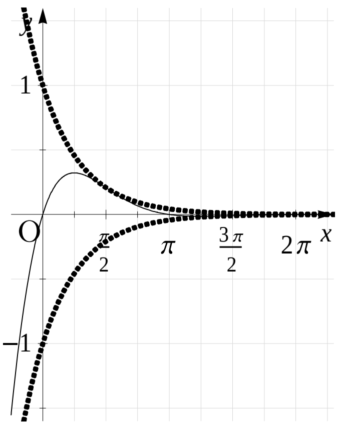
グラフは時々 $y=x, y=-x$ に接する形になる．

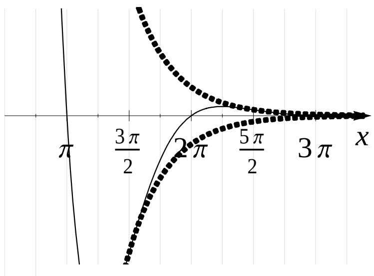




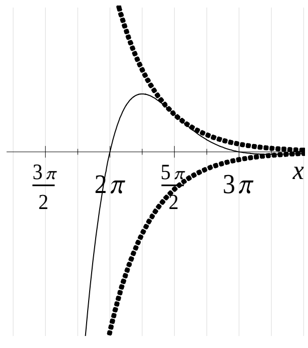
(2)　$y=e^{-x}\sin x$

(1)と同様に，$y=e^{-x}\sin x$ は　$y=e^{-x}, y=-e^{-x}$ のグラフに挟まれている．





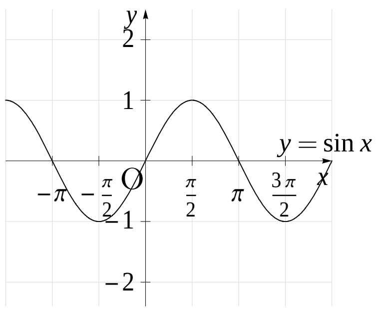
一部を拡大するとこのようになる↑

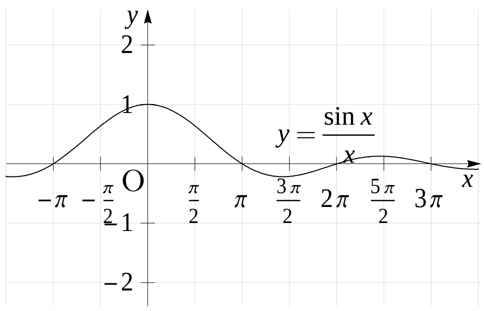


さらに一部を拡大するとこのようになる↑

(3)　$y=f(x)$ のグラフの概形がわかっているとき，

$y=f(x)\times\dfrac{1}{x}=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)$　の概形は，$y=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{f(x)-0}{x-0}$　より，原点 O と $y=f(x)$ 上の点 $(x, f(x))$ を通る直線の傾きと見て捉えることができる．



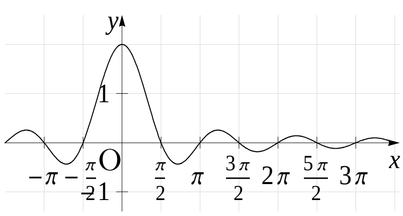


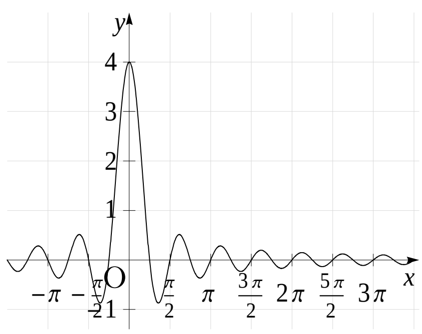
グラフより

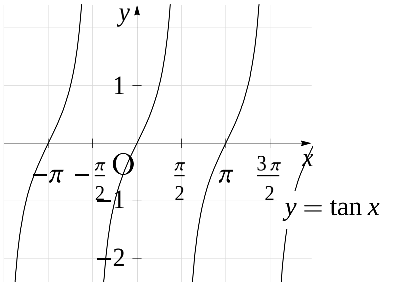
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1, \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$$

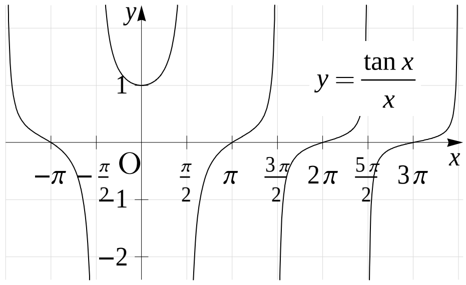
であることが一目でわかる。同様に、例えば

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2, \lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=0, \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$









参考文献

[1] 飯高茂・松本幸夫編．文部科学省検定済教科書「新編数学Ⅲ」．東京書籍．2004.

[2] 矢野健太郎監修，春日正文編．「モノグラフ 24　公式集　４訂版」．科学新興社．1988.

[3] 栗田哲也　他２名著．「大学への数学　微積分／基礎の極意」．東京出版．2000.