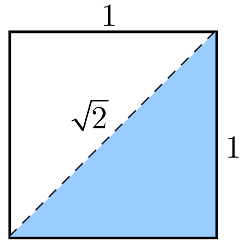
§１　黄金数（黄金分割）：$p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618033988\cdots$



（図１－１）

A.　無理数 $\sqrt{2}$ と黄金長方形

紀元前の昔から，１辺が１の正方形の対角線の値を整数の比で求めたいと考えられてきた（図１－１）．現在では，その対角線の長さは $\sqrt{2}$ であって無理数であるから整数の比では表すことが出来ないことは良く知られている．

多くの試行錯誤の末，それが不可能であることを最初に証明したのは古代ギリシア人・ピュタゴラス学徒であるといわれている＜ピュタゴラス：前 570 頃－490 頃＞．

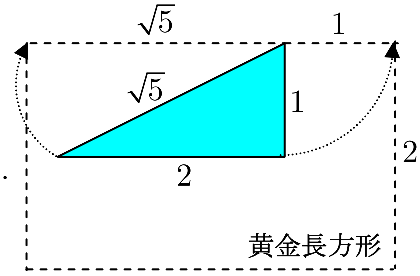
現在「高校A」の教科書には，ピュタゴラス学派が証明した背理法による方法と同様のものが載っている．

ピュタゴラス学徒は,「正方形の対角線の値を整数の比で表すことができない」という事実に驚いた．また,「すべての数は整数の比で表される」という説を持っていた彼らは,「整数の比で表すことができない数の存在」を伏せていたほどであった．

好奇心の強いギリシア人はさらに，図形を一般化し，辺の長さを変えてその対角線の長さを調べ，図１－２ のような長方形を調べた．この図の長方形の辺の比 $(\sqrt{5}+1):2$ は，不思議な思いがけない秘密が隠されていた．

この長方形を$\boxed{\text{黄金長方形}}$，比 $(\sqrt{5}+1)$ ：２ を$\boxed{\text{黄金比}}$（黄金平均，神聖比）という．

また，黄金比の値を $p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ で表し，$\boxed{\text{黄金数}}$ という．

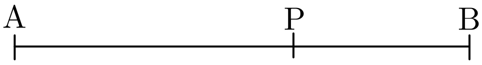


（図１－２）

この黄金比（黄金数）の不思議さ，おもしろさを紹介する．

B．黄金分割（外中比分割）

図１－３で，BA：AP=AP：PB（$AP^2=AB\cdot BP$）であるとき，点Ｐは線分 AB を$\boxed{\text{黄金分割}}$（古代ギリシアでは外中比分割）するという．



（図１－３）

黄金分割を最初に発見したのは，バビロニア人であるといわれている．

問１．１　図１－３ において，AB：AP=AP：PB=$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ であることを証明せよ．

（証明）$AB=1,\ x=AP$ とすると，等式 AB：AP=AP：PB は $1:x=x:(1-x)$ となる．よって，$x^2=(1-x)$ から $x^2+x-1=0$．

よって，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，　$x>0$ であるから，$x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$．

ゆえに，$1:x=1:\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

したがって，AB：AP=AP：PB=$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$．　　　QED.

○　黄金数の値は，次のような無理数である；

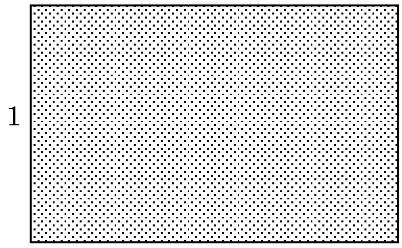
$$p=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339887498948482045868343656381177203091798058\ \cdots$$

C．西洋の美（黄金比 $1+\sqrt{5}:2$）と 日本の美（ $\sqrt{2}:1$）

古代より，エジプト，西洋では黄金比や黄金長方形は美しいものととらえ，いろいろな建物や彫刻に現れる．

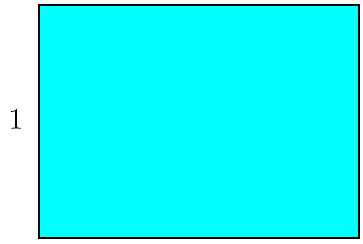
一方，日本では，$\sqrt{2}$ 長方形が美しい形ととらえ，下の例のようなところで使われている．

黄金長方形 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\cdots$



（図１－４）

$\sqrt{2}$ 長方形 $\sqrt{2}=1.414\cdots$

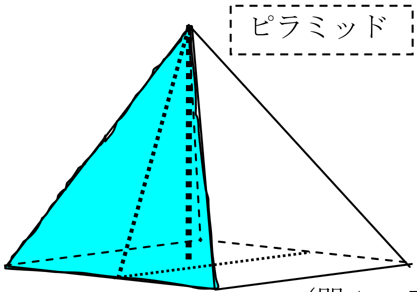


（図１－５）

(例) ○ **黄金比：** ピラミッド，パルテノン神殿，ギリシャ彫刻（ミロのヴィーナス など），均整のとれた男性像（次ページ），キャッシュ・カード

○ **$\sqrt{2}$ 長方形：** 法隆寺金堂，五重塔，聖徳太子像，コピー用紙（A0 版）

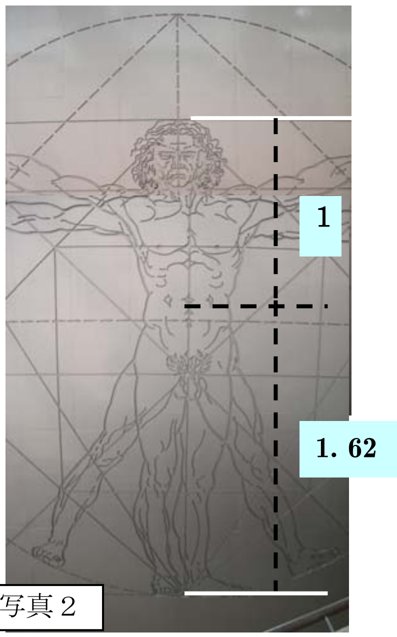
ピラミッド



（図１－６）　（問１．５　参照）

黄金比

パルテノン神殿　写真１



黄金比

写真２

レオナルド・ダ・ヴィンチ
「ウィトルウィウス的人体図」

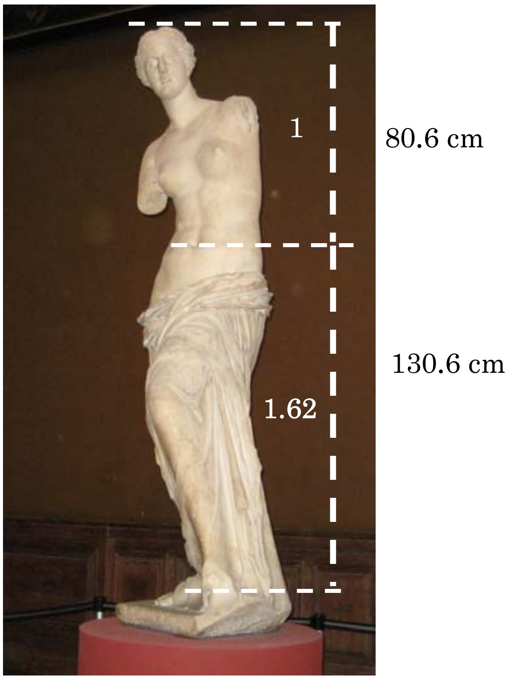
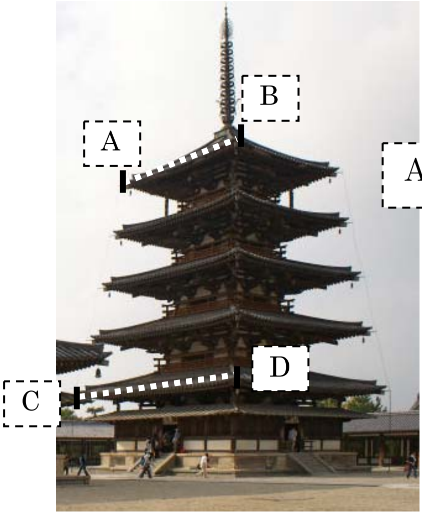
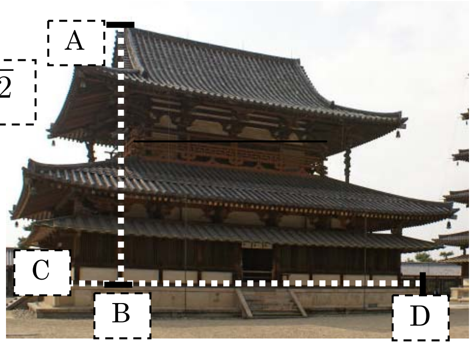


写真３　ミロのヴィーナス



AB : CD = 1 : $\sqrt{2}$



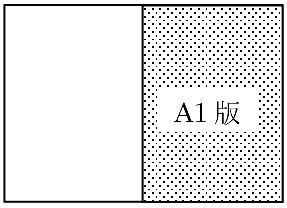
法隆寺・金堂　写真５

法隆寺・五重塔　写真４

＜引用＞　写真１：URL　http://fano.hp.infoseek.co.jp/html/photos/parthenon.htm
（パルテノン神殿の写真）
写真２：金沢工業大学内壁画
写真３：金沢工業大学　小山　陽一撮影
写真４，５：URL　http://www.morisawa.org/picture/nara_m/DSCF1321.html
（列島宝物館）

問１．２　日本工業規格の A0 版コピー用紙は 面積 1 m^2 の $\sqrt{2}$ 長方形，B0 版は 面積 1.5 m^2 の $\sqrt{2}$ 長方形である．
　それぞれの，長辺，短辺の長さを求めよ．
（A1 版，A2 版，A3 版，A4 版は(それぞれ順に半分の大きさで) すべて $\sqrt{2}$ 長方形である（図 1-7）．　B0 版でも同じである．

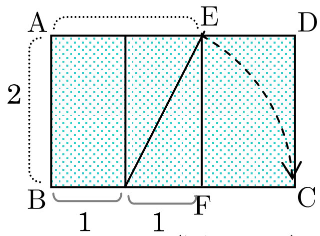
A0 版(1 m^2)



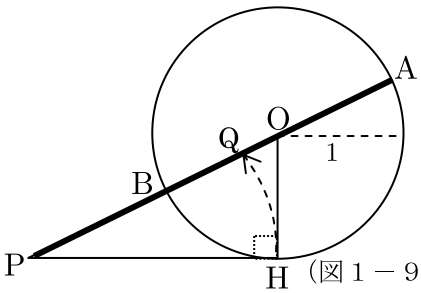
(日本工業規格)
（図１－７）

D．いろいろな図形に現れる黄金比

問１．３　図１－８ は，黄金長方形の作図方法を示している．▭ABCD は黄金長方形であることを証明せよ．



（図１－８）



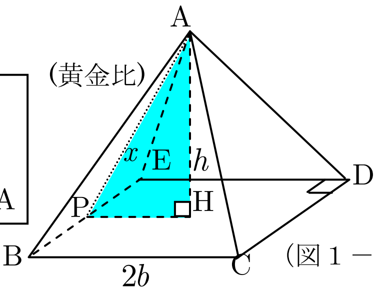
（図１－９）

問１．４　図１－９において，△OPH は AP が円 O の中心を通る線分で，∠H = 90° の直角三角形で PH = PQ である．このとき，点 Q は PA を黄金分割することを証明せよ．

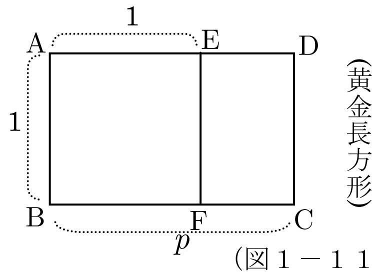
問１．５　①　ピラミッドは，その高さを一辺とする正方形の面積と，１つの斜面の面積とが等しくなるように作られているという．図１－１０ のピラミッドにおいて，AP : PH = x : b は黄金比であることを証明せよ．

② あるピラミットは，底面の１辺が 230m，高さが 146m であるという．このピラミッドの（① での）$\dfrac{x}{b}$ を計算せよ．

条件：
$\triangle ABE = AH^2$
AB=BC=CD=DA



（図１－１０）



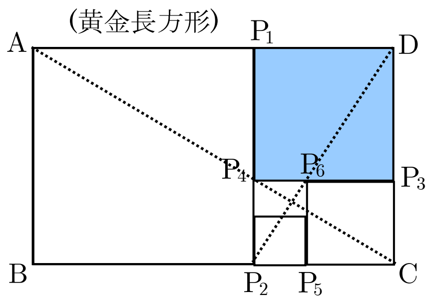
（図１－１１）

問１．６　図１－１１ で，▭ABCD ∽ ▭FCDE であるとき，比 BC : BA ＝CD : CF は黄金比であることを証明せよ（高校の「数学Ⅰ」にある問題である）．

問１．７　① 図１－１２ において，▭ABCD は黄金長方形で，□ABP_2P_1，□$DP_1P_4P_3$，□$CP_3P_6P_5$，･･･ は正方形である．このとき，▭CDP_1P_2，▭$CP_3P_4P_2$，▭$P_2P_5P_6P_4$ ･･･ はまた黄金長方形であることを証明せよ．

② ▭ABCD の面積を S とするとき，▭$P_2P_5P_6P_4$ の面積を S と黄金数 $p=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ を用いて表せ．

③ P_4 は対角線 AC を，P_6 は対角線 DP_2 を黄金分割することを証明せよ．

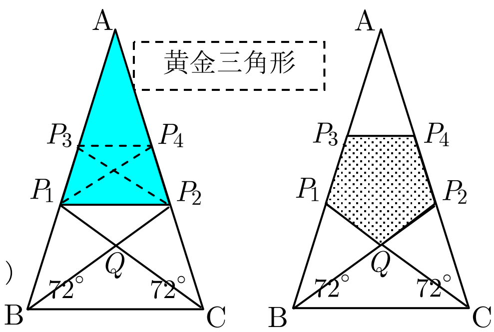


（図１－１２）

問１．８　図１－１３ の △ABC は， AB ＝ AC，∠B ＝∠C ＝ 72° で，BP_2, CP_1 は底角の２等分線である．この場合，△ABC を

$\boxed{\text{黄金三角形}}$ という．このとき，次を証明せよ．

（１） 点 P_1 は，線分 AB を黄金分割する．
（２） $\triangle AP_1P_2$ は黄金三角形である．
（３） P_2P_3, P_1P_4 がまた底角の２等分線であるとき，図形 $QP_2P_4P_3P_1$ は正五角形である．

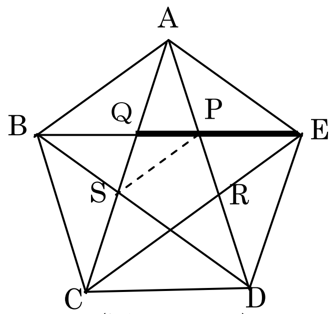


（図１－１３）

問１．９（１） 図１－１４ の正五角形 ABCDE において，１辺の長さが １ であるとき，

① BE，BQ の長さを求めよ．

② $\dfrac{BP}{PE}=\dfrac{EP}{PQ}=\dfrac{PS}{PQ}=\dfrac{EC}{AB}=p$（黄金数）であることを証明せよ．



（図１－１４）

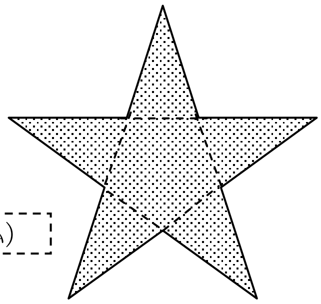
（よって，点 P は線分 BE を，点 P は線分 EQ を黄金分割する）

（２） 図１－１４ には，② の他にも多くの黄金比が隠されている．
それを調べよ．

ピュタゴラス学派の１人，ヒッパソッスという人が上の正五角形に現れる黄金比が無理数であることを発見したといわれている．

星型五角形（ﾍﾟﾝﾀｸﾞﾗﾑ）には，多くの黄金数が隠されていて，
ピュタゴラス学派はこれを神聖なものと考えていた（図１－１５）．
ピュタゴラス学派のシンボルマーク（徽章）に用いられていた．

星型五角形（ﾍﾟﾝﾀｸﾞﾗﾑ）

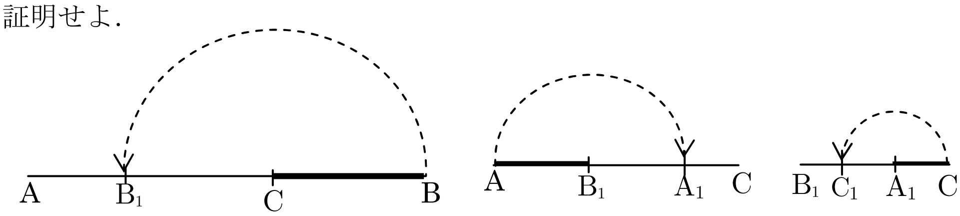


（図１－１５）

問１．１０ 図１－１６ において，点 C は線分 AB を黄金分割していて，B_1 は点 B を点 C を中心に点対称した点である．
A_1 は点 A を点B_1を中心に点対称した点である．

この操作を繰り返すとき，$\dfrac{AC}{CB}=\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{B_1A_1}{A_1C}=\cdots=p$

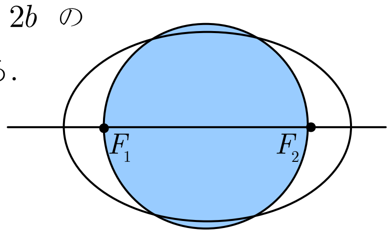
であることを証明せよ．



（図１－１６）

問１．１１ 図１－１７ は，長軸，短軸の長さがそれぞれ $2a, 2b$ の楕円と，その焦点 F_1，F_2 を直径の両端とする円を表している．

この楕円の面積と円の面積が等しいとき，$\dfrac{a}{b}=p$ を証明せよ．

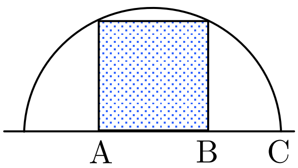


（図１－１７）

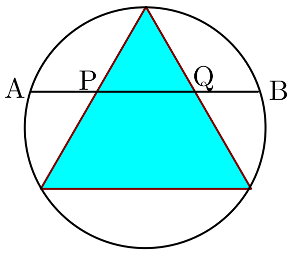
問１．１２ 図１－１８ のように，正方形が半円に内接している．比$AB:BC$ を求めよ．

問１．１３ 図１－１９ のように，円に正三角形が内接している．線分 PQ は２辺の中点を結ぶ線分である．比$PQ:QB$ を求めよ．

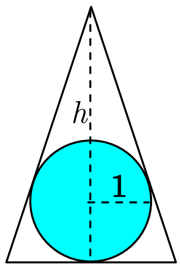
問１．１４ 半径が１の円を内接円にする２等辺三角形のうち，等辺の長さが最小となるものの，底辺の高さ h を求めよ（図１－１９）．



（図１－１８）



（図１－１９）



（図１－２０）

Ｅ．黄金数とフィボナッチ（スイス；Fibonacci　1170?－）数列

数列　$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \cdots$

は，４ 項目以降の項は２ つ前の２項の和となっている．

つまり

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = a_0 + a_1,\ a_3 = a_1 + a_2,\ a_4 = a_2 + a_3, \cdots\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \cdots$$

この数列 $\{a_n\}$ を $\boxed{\text{フィボナッチ数列}}$ という．　　　　　　　　　　　$(n \geqq 3)$

問１．１５（１）フィボナッチ数列 $\{a_n\}$ に対して，$f_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ とおくとき，$\dfrac{f_6}{f_5}$，$\dfrac{f_8}{f_7}$ を求めよ．

（２）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n=\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$ は黄金数 p であることを，$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$，

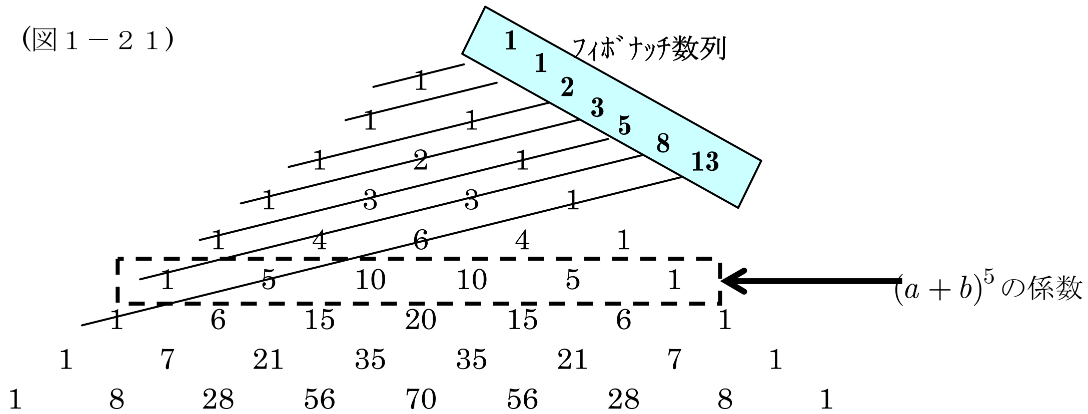
$(n \geqq 0)$ であること（18 世紀中期には知られていた事実）を利用して証明せよ．

○　フィボナッチ数列とパスカルの三角形

図１－２１ のようにパスカルの三角形の右上がりの数の和が，フィボナッチ数列となっている．パスカルの三角形の数の並びは，２項係数 ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ である；

２項係数 ${}_nC_r$ は２項展開式の係数に現れる数である；

(図１－２１)



問１．１６　黄金数数列

（１）黄金数 $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ に対して，次式を証明せよ．

①　$p^2 = p + 1$　　②　$p^n = p^{n-1} + p^{n-2}$（$p \geq 2$）

（２）$\{1, p, p^2, p^3, p^4, \cdots\}$ を $\boxed{\text{黄金数数列}}$ という．黄金数数列の一般項 p^n は黄金数 p の一次式 $p^n = a\,p + b$ で表すことができる．それを求めよ．

（３）（２）の係数 a, b はフィボナッチ数列と関係がある．その関係を調べよ．

Ｆ．黄金数と連続根号数，連分数

（例）連続根号数 $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}} = p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　・・・(*)　　が成り立つ．

問１．１７　$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}}}}}}}}$　の値を求めよ.

（例）連分数　$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}=p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$　　・・・(**)　が成り立つ.

問１．１８　$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}$　の値を求めよ.

＜黄金数は，その連続根号数(*)，連分数表示(**) に１ だけが現れる最も単純な形をとり，
不思議な数である＞

p　の連分数（50 step）の近似値：

$\boxed{1.61803398874989484820458683436563811772 03}$127439638

p　の真の値（小数点以下 50 桁）：

1.61803398874989484820458683436563811772030917980 58

問１．１９（１）フィボナッチ数列の一般項 a_n の商 $c_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ は，$c_{n+1}=1+\dfrac{1}{c_n}$ を満たすことを証明し，かつ，黄金数に等しい連分数 (**) を証明せよ.

（２）黄金数 p の性質 $p=1+\dfrac{1}{p}$ を利用して，黄金数に等しい連分数 (**) を確かめよ.