１次関数と２次関数

ー 直流回路への応用 ー

金沢工業大学
宮田昌近

ねらい

数式を含む文章は何らかの事がらを主張している．等式や不等式は単独で文（命題）を形成している．$E = mc^2$ という簡単な式を見て感動する人も少なくない．数学で式の性質を学ぶのは，数式から導かれる多くの性質によって，文章の行間を読めるようにするためである．例えば，$ax^2 + bx + c$ を $a(x-p)^2 + q$ の形にする変形は，$y = y_0 + v_0 t - 2^{-1} g t^2$ から y の最大値を求めるのに役に立つ．この「y の最大値を求める」という表現では，右辺の y_0，v_0，g を定数，t を変数とみなすことが前提となっている．高校で物理を学んだ諸君は，高さ y_0 の地点から鉛直上向きにボールを初速度 v_0 で投げたときの時刻 t におけるボールの高さが上式右辺のように表わされることを思い出すであろう．

現象の解析やシステムの設計に数式を用いる場合，通常は定数も数値でなく文字で表わす．さらに言えば，対象が違えば数値が同じでも別の文字で表わすことが多い．これによって，数式が主張している内容が数値の場合より分かりやすくなる．例えば，電気回路では通常枝 i に置かれた抵抗の値を R_i で表わしている．この資料では，**多くの文字を含む式の扱いに慣れる**ように，直流の電気回路の解析に現れる式を用いて，連立１次方程式の解法ならびに１変数の１次関数と２次関数の性質を復習する．必要とされる物理法則は本文中に要約しているため，（例 2.1 を除いて）電気回路に関する予備知識は一応不要である．回路解析では抵抗値は定数で電流は電源電圧の１次関数であるが，２次関数の例に用いた負荷抵抗の消費電力では電源電圧を定数とし抵抗値を変化させたときの極値を求めている．このように，多数の文字を含む物理系やシステムのモデルでは，何を調べたいかによって，何を何の関数とみなすかが異なることに留意してほしい．

目次

1．直流回路

準備として，まずオームの法則とキルヒホフの法則について述べる．

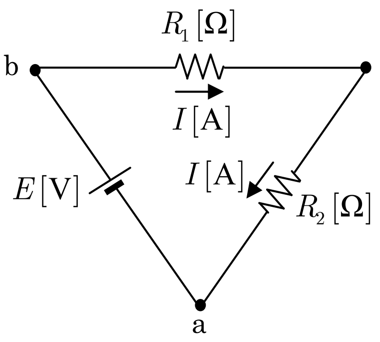


図 1.1　抵抗を直列に接続した回路

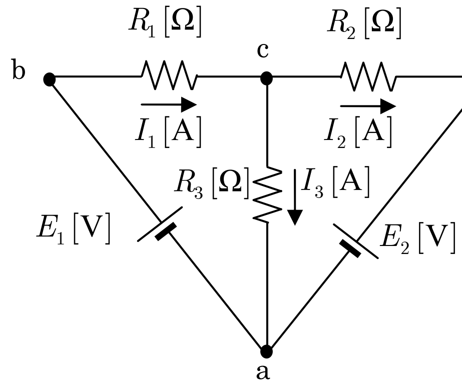


図 1.2　二つの電源を含む回路

図 1.1 の $E\,[\mathrm{V}]$ は直流電源の起電力，$R_1\,[\Omega]$，$R_2\,[\Omega]$ は抵抗の値，$I\,[\mathrm{A}]$ は抵抗を流れる電流である．ここで，$[\mathrm{V}]$（ボルト），$[\Omega]$（オーム），$[\mathrm{A}]$（アンペア）はこれらの物理量の単位であり，［ ］で囲むことによって単位であることを明示している．図 1.1 の回路では

（1）$R_1\,[\Omega]$ の抵抗を $I\,[\mathrm{A}]$ の電流が流れるときの電圧降下（抵抗の両端にかかる電圧）は $R_1 I\,[\mathrm{V}]$ である（オームの法則）．$R_2\,[\Omega]$ の抵抗についても同様．

（2）点 a，b，c について，それぞれ流入する電流と流出する電流の値は等しい（キルヒホフの電流則）．

（3）この回路の閉路 $\mathrm{a} \to \mathrm{b} \to \mathrm{c} \to \mathrm{a}$ における電圧降下の総和 $(R_1 I + R_2 I)\,[\mathrm{V}]$ は起電力の総和 $E\,[\mathrm{V}]$ に等しい．すなわち，$R_1 I + R_2 I = E$（キルヒホフの電圧則）．

である．また，図 1.2 の回路では

（1）$R_1\,[\Omega]$，$R_2\,[\Omega]$，$R_3\,[\Omega]$ の抵抗における電圧降下はそれぞれ矢印の向きに $R_1 I_1\,[\mathrm{V}]$，$R_2 I_2\,[\mathrm{V}]$，$R_3 I_3\,[\mathrm{V}]$ である（オームの法則）．

（2）点 a，b，c，d について，それぞれ流入する電流の総和と流出する電流の総和は等しい．例えば点 c での流入する電流の総和 $I_1\,[\mathrm{A}]$ は流出する電流の総和 $(I_2 + I_3)\,[\mathrm{A}]$ に等しい．すなわち，$I_1 = I_2 + I_3$（キルヒホフの電流則）．

（3）この回路の閉路 $\mathrm{b} \to \mathrm{c} \to \mathrm{a} \to \mathrm{b}$，$\mathrm{c} \to \mathrm{d} \to \mathrm{a} \to \mathrm{c}$，$\mathrm{a} \to \mathrm{b} \to \mathrm{c} \to \mathrm{d} \to \mathrm{a}$ について，それぞれ閉路内の電圧降下の総和は起電力の総和に等しい．すなわち

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1 \tag{1.1}$$

$$R_2 I_2 + R_3(-I_3) = (-E_2) \tag{1.2}$$

$$R_1 I_1 + R_2 I_2 = E_1 + (-E_2) \tag{1.3}$$

である（キルヒホフの電圧則）．

上式の $R_3(-I_3)$，$(-E_2)$ は時計回りの閉路の向きに合わせた電圧降下，起電力であることに注意．

図 1.1 の回路の電流 I はキルヒホフの電圧則を表わす

$$R_1 I + R_2 I = E \tag{1.4}$$

からただちに求められ

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2} \tag{1.5}$$

である[1]．図 1.2 の回路では$I_1 = I_2 + I_3$であり，電流I_1，I_2は連立方程式

$$R_1 I_1 + R_3(I_1 - I_2) = E_1 \tag{1.6}$$

$$-R_2 I_2 + R_3(I_1 - I_2) = E_2 \tag{1.7}$$

を解くことによって求められる．途中の計算を省略して結果を示すと，解は

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)E_1 - R_3 E_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \tag{1.8}$$

$$I_2 = \frac{R_3 E_1 - (R_1 + R_3)E_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1} \tag{1.9}$$

と表わされる．この解の求め方について次に述べる．

２．連立１次方程式

I_1，I_2を未知数とする連立方程式(1.6)，(1.7)は，x，yを未知数とする連立方程式

$$ax + by = p \tag{2.1}$$

$$cx + dy = q \tag{2.2}$$

の$b = -c$の場合に相当する（まず$I_1 - I_2$を求めると計算が少し簡単になる）．式(2.1)，(2.2)の$ad - bc \neq 0$のときの解は

$$x = \frac{pd - bq}{ad - bc} \tag{2.3}$$

$$y = \frac{aq - pc}{ad - bc} \tag{2.4}$$

であり，行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

と表わされるが，通常の解法についてはここでは省略し，以下では「重ね合わせの理」を用いた解法について説明する．

$$ax' + by' = p \tag{2.6}$$

$$cx' + dy' = 0 \tag{2.7}$$

$$ax'' + by'' = 0 \tag{2.8}$$

$$cx'' + dy'' = q \tag{2.9}$$

とすると，

$$a(x' + x'') + b(y' + y'') = p \tag{2.10}$$

$$c(x' + x'') + d(y' + y'') = q \tag{2.11}$$

である．すなわち，連立方程式(2.6)，(2.7)の解x'，y'と連立方程式(2.8)，(2.9)の解x''，y''を用いて連立方程式(2.1)，(2.2)の解$x'+x''$，$y'+y''$が得られる（x'/p，y'/p，x''/q，y''/qは式(2.5)の逆行列の要素に等しい）．

例 2.1　図 1.2 の回路で$E_2 = 0$のときのI_1を$I_1{}'$で表わすと，回路図から直接

$$I_1{}' = \frac{E_1}{R_1 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}}$$

が得られる．同様に$E_1 = 0$のときのI_1を$I_1{}''$で表わすと，E_1の値がa倍，E_2の値がb倍になったときのI_1の値は$aI_1{}' + bI_1{}''$に等しい．

より複雑な構成の直流回路に対するキルヒホフの電圧則を表わす１次独立な閉路の選び方や，線形回路の特徴を活用したテブナンの定理の証明を復習することにより，連立１次方程式の解の性質について理解を深めることを期待する．

補足：重ね合わせは各種の線形方程式に適用できる基本的な技法である．工学部で学ぶ回路やシステムに関する理論の多くは線形性を前提としている．例えば，「線形・時不変なシステムの出力は入力とインパルス応答の畳み込み積分である」という性質も重ね合わせの原理で証明される．なお，fが線形であるとは$f(x+y) = f(x) + f(y)$，$f(ax) = af(x)$が成立することをいい，行列による変換や微分，積分はいずれも線形の演算である（正確な表現は割愛）．

３．１次関数

a，bは値が決まっている数（定数），xはいろいろな値を取りうる数（変数）であるとき，xの値を決めれば式$ax+b$の値も決まる．そこで，xを入力すれば（入力をa倍してbを加え）$ax+b$を出力する機械を考えてこれをfで表わし，入力がxのときの出力を$f(x)$で表わすと，例えば$f(2) = 2a + b$，$f(-3) = -3a + b$である．一般に，関数fとは**このような対応付けを行う機械のようなもの**と考えてよく，入力xのとり得る値の集合をfの定義域，出力$f(x)$のとり得る値の集合を値域という．また$y = f(x)$であるとき，xy平面上に点$(x, f(x))$をプロットして得られる曲線（直線を含む）をfのグラフ（あるいは$y = f(x)$のグラフ）という．

例 3.1 任意の実数xに対してこれを四捨五入した整数$f(x)$に対応させる関数fの定義域はすべての実数（実数の集合），値域はすべての整数（整数の集合）である．

簡単のため，x を $f(x)$ に対応させる関数 f を「関数 $f(x)$」ということが多い．例えば関数 x^2+1 とは $f(x)=x^2+1$ である f を意味する．とくに $f(x)$ が $ax+b$ の形であらわされるとき，f や $ax+b$ を１次関数という．

例 3. 2 式(1.5)で $R_1=200$，$R_2=300$ とし，E を変数とすると,$I=0.002E$ と表わされ，E の値を決めると I の値も決まる．E と I の関係は表 3.1 のように表わされ，$I=0.002E$ のグラフは図 3.1 のようになる．

表 3.1　電圧と電流の関係

E	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	$\cdots$
I	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	$\cdots$

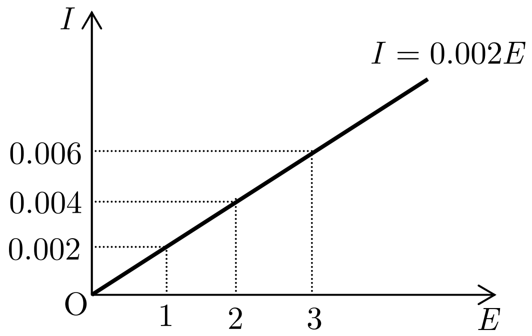


図 3.1　図 1.1 の回路の電流 I

原点 $(0,0)$，点 $(E,0)$，点 (E,I) のなす三角形はすべて３辺の比が一定で互いに相似であるからこのグラフが原点を通る直線であることが分かる．

例 3. 3 式(1. 8)で $R_1=R_2=100$，$R_3=200$ とすると

$$I_1=\frac{(1+2)\times 10^2E_1-2\times 10^2E_2}{(1\times 1+1\times 2+2\times 1)\times 10^4}=0.006E_1-0.004E_2$$

となり，例えば $E_2=3$ の場合，E_1 と I_1 の関係は図 3.2 のようになる．

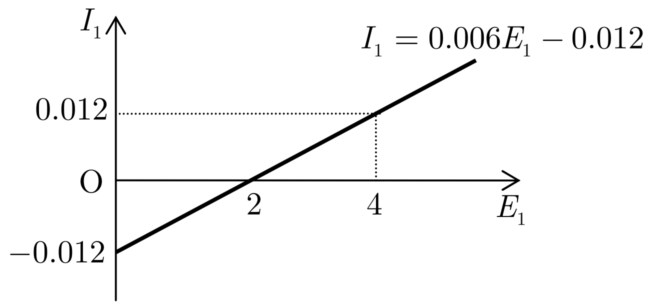


図 3.2　図 1.2 の回路の電流 I_1

$E_1 < 2$ のときは $I_1 < 0$ となるが，このことは電流 I_1 が図 1.2 の矢印と逆向きに流れていることを意味する．$I_1 = 0.006E_1$ のグラフは原点を通る直線であり，$I_1 = 0.006E_1 - 0.012$ のグラフはこれを I_1 軸方向に -0.012 平行移動した直線である．

$I_1 = f(E_1) = 0.006E_1 - 0.012$ とすると

$$\frac{f(E_1+1)-f(E_1)}{(E_1+1)-E_1} = 0.006 \tag{3.1}$$

であり，この値を $I_1 = 0.006E_1 - 0.012$ のグラフの傾き（または勾配）という． 同様に $y = ax + b$ のグラフの傾きは a であり，x が 1 増加すれば y は a 増加する（$a < 0$ のときは $|a|$ 減少する）．

点 (x_1, y_1) を通る傾き a の直線のグラフは $y - y_1 = a(x - x_1)$ であるが，$x \neq x_1$ のときの式

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = a \tag{3.2}$$

の方が覚えやすく，上式の両辺に $(x - x_1)$ を掛ければ $x = x_1$ でも成立する $y - y_1 = a(x - x_1)$ が得られる．同様に点 (x_1, y_1)，(x_2, y_2) を通る直線のグラフの式も $x_1 \neq x_2$，$x \neq x_1$ のときの式

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{3.3}$$

の方が覚えやすい．

補足： 点 b の近く（近傍）で x に依存しない定数 a を用いて $f(b+x) = f(b) + ax$ と近似できる（$x \to 0$ のとき近似誤差が 0 に収束する）とき，a を点 b における微分係数という $\left(a = \dfrac{d}{dx} f(b) \right)$．また，点 (c, d) の近くで x，y に依存しない適当な定数 a，b が存在して $g(c+x, d+y) = g(c, d) + ax + by$ と近似できるとき，a，b を点 (c, d) における偏微分係数という $\left(a = \dfrac{\partial}{\partial x} g(c, d), a = \dfrac{\partial}{\partial y} g(c, d) \right)$．偏微分係数は $g(c+x, d+y) = g(c, d) + ax + by$ と近似できない場合にも定義されているが， 応用上は上記の（連続偏微分可能な）場合のみ活用できれば十分である． 微分の本質は 1 次近似であるという認識は，後に複素数の関数や作用素の微分を学ぶときに役立つ．

４．ポテンシャル

電源の起電力を負の電圧降下と考えると，キルヒホフの電圧則は「回路内の任意の閉路における電圧降下の総和は 0 である」と表現できる．このことは回路内の任意の２点間の電圧降下の総和は経路に依存せず，各点に対して電位とよばれる物理量（電気的ポテンシャル）を定義できることを意味する．図 1.2 の回路の場合，点 a，b，c，d の電位をそれぞれ V_a，V_b，V_c，V_d で表わ

すと，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{b} \to \mathrm{a}\text{の電圧降下}:V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{a}} = E_1 \\
&\mathrm{b} \to \mathrm{c}\text{の電圧降下}:V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{c}} = R_1 I_1 \\
&\mathrm{c} \to \mathrm{a}\text{の電圧降下}:V_{\mathrm{c}} - V_{\mathrm{a}} = R_3 I_3 \\
&\mathrm{d} \to \mathrm{a}\text{の電圧降下}:V_{\mathrm{d}} - V_{\mathrm{a}} = E_2 \\
&\mathrm{d} \to \mathrm{c}\text{の電圧降下}:V_{\mathrm{d}} - V_{\mathrm{c}} = -R_2 I_2
\end{aligned}
$$

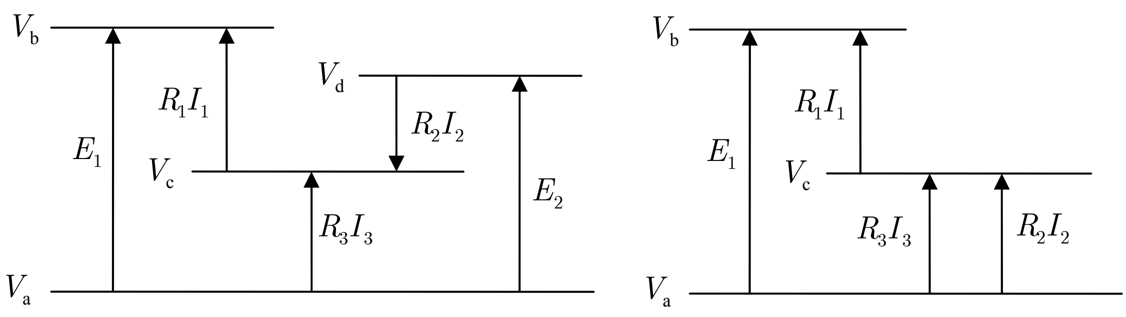
であり，例えば，閉路$\mathrm{a} \to \mathrm{b} \to \mathrm{c} \to \mathrm{a}$における電圧降下の総和は

$$
\begin{aligned}
&-E_1 + R_1 I_1 + R_3 I_3 \\
&= (V_{\mathrm{a}} - V_{\mathrm{b}}) + (V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{c}}) + (V_{\mathrm{c}} - V_{\mathrm{a}}) \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

となる．また，上式を書き換えた

$$
\begin{aligned}
E_1 &= (V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{a}}) \\
&= (V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{c}}) + (V_{\mathrm{c}} - V_{\mathrm{a}}) \\
&= R_1 I_1 + R_3 I_3
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

は経路$\mathrm{b} \to \mathrm{a}$での電圧降下と経路$\mathrm{b} \to \mathrm{c} \to \mathrm{a}$での電圧降下が等しいことを示している．$V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{a}}$を図示する場合は，通常点 a から点 b へ向かう矢印を描いて，そのそばに$V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{a}}$の値をかく．このことは点 a から点 b へ向かうと電位が$V_{\mathrm{b}} - V_{\mathrm{a}}$だけ増加することを意味するので，点 a から点 b へ向かうときの電圧降下とは符号が逆になる．図 4.1 に図 1.2 の回路の各点間の電位差を示す．



（a）$V_{\mathrm{c}} < V_{\mathrm{d}}$の場合（$I_2 < 0$）　　（b）$E_2 = 0$の場合

図 4.1　図 1.2 の回路の各点の電位差

図の矢印の向きは電圧降下とは逆であるが，例えば閉路$\mathrm{a} \to \mathrm{b} \to \mathrm{c} \to \mathrm{d} \to \mathrm{a}$における電圧降下の総和が$0$であることを，符号を逆にした$E_1 - R_1 I_1 - R_2 I_2 - E_2 = 0$で表わしてよい（矢印の向きは慣習に従うのが無難）．

補足: 経路を逆にたどると電圧降下の符号が逆になる．したがって，任意の閉路に沿った電圧降

下の総和が0になるということは，例えば c を始点，a を終点とする任意の経路c → ⋯ → a に沿った電圧降下の総和は「ある値」に等しいことを意味する．点 a を基準点とする点 c の電位（電気的ポテンシャル）とは，この「ある値」のことである．

５．２次関数

$R\,[\Omega]$の抵抗に$I\,[\mathrm{A}]$の電流が流れているときの消費電力（単位時間当たりに消費するエネルギー）は，抵抗の電圧降下$RI\,[\mathrm{V}]$と電流$I\,[\mathrm{A}]$の積$RI^2\,[\mathrm{W}]$であり，回路で消費される電力は各抵抗で消費される電力の総和に等しい．したがって，図 1.1 の回路で消費される電力の総和Pは

$$P = R_1 I^2 + R_2 I^2 \tag{5.1}$$

である．また，図 1.2 の回路の抵抗で消費される電力の総和Pは

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 (I_1 - I_2)^2 \tag{5.2}$$

である．

先に述べたように，図 1.2 の回路の電流は重ね合わせを用いて計算できる．例えば$E_1 = 3$，$E_2 = 2$のときのI_1，I_2は，$E_1 = 3$，$E_2 = 0$のときのI_1'，I_2'と$E_1 = 0$，$E_2 = 2$のときのI_1''，I_2''を用いて$I_1' + I_1''$，$I_2' + I_2''$と表わされる．しかし，$I_1' I_2'' \neq 0$であるから

$$R_1 (I_1' + I_1'')^2 \neq R_1 (I_1')^2 + R_1 (I_1'')^2 \tag{5.3}$$

であり，電力に対して重ね合わせによる解法を用いることはできない．

補足：複数の周波数の電流が流れている交流回路の電力は各周波数成分の電力の和に等しい [1]．

例 5.1　図 1.1 の回路で$R_1 = 200$，$R_2 = 300$のとき，$P = 0.002\,E^2$だから，EとPの関係を表わす例 3.2 のような表を作成すると，下図のグラフが得られる．

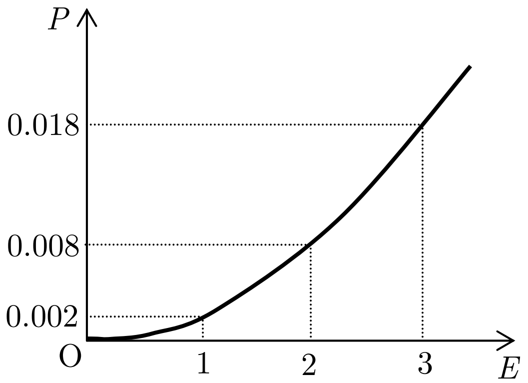


図 5.1　図 1.1 の回路の消費電力

例 5.2　図 1.2 の回路で $R_1 = R_2 = R_3 = R$ とすると，式(1.8)，(1.9)の I_1 は

$$I_1 = \frac{2E_1 - E_2}{3R}$$

となり，R_1 で消費される電力 P_1 は

$$P_1 = R\left(\frac{2E_1 - E_2}{3R}\right)^2 = \frac{(2E_1 - E_2)^2}{9R}$$

で表わされる．したがって，R と E_2 を一定にして E_1 を変化させたときの P_1 を E_1 の関数とみなすことができる．

一般に a，b，c が定数で $a \neq 0$ のとき $f(x) = ax^2 + bx + c$ である f を 2 次関数という．$f(x)$ は

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{5.4}$$

と変形できるから，$x = -\dfrac{b}{2a}$ で最大または最小となる（$a > 0$ のとき最大，$a < 0$ のとき最小）．

$y = f(x)$ のグラフは $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{2a}$，y 軸方向に $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ 平行移動したものに等しい．このことはつぎのようにして証明できる．

$y_1 = ax_1^2$ を満足する (x_1, y_1) に対して $x_2 = x_1 - \dfrac{b}{2a}$，$y_2 = y_1 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ で定められる (x_2, y_2) は $y_2 = f(x_2)$ を満足する．すなわち，f のグラフ上にある．逆に $y_3 = f(x_3)$ を満足する (x_3, y_3) に対して $x_3 = x_4 - \dfrac{b}{2a}$，$y_3 = y_4 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ で定められる (x_4, y_4) は $y_4 = ax_4^2$ を満足し，$y = ax^2$ のグラフ上になければならない．

例 5.3　$y = 0.5\,x^2$ および $y = 0.5(x+2)^2 - 1$ のグラフを図 5.2，図 5.3 に示す．

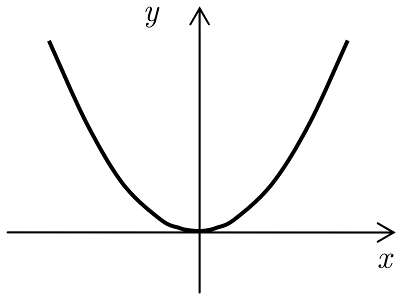


図 5.2　$y = 0.5\,x^2$ のグラフ

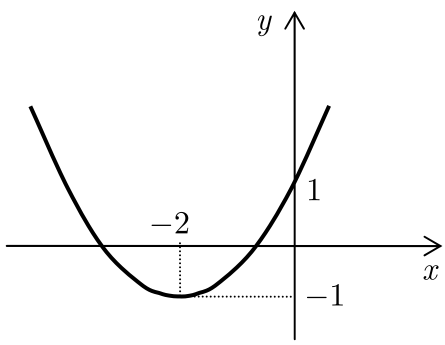


図 5.3　$y = 0.5(x+2)^2 - 1$ のグラフ

$b = 0.5\,a^2$ とすると，$(b-1) + 1 = 0.5\left\{(a-2) + 2\right\}^2$．したがって，点 $(a-2, b-1)$ は $y + 1 = 0.5(x+2)^2$ のグラフ上にある．

６．グラフの移動と変形

グラフの平行移動，対称移動，拡大縮小については次のように考えればよい．$y=f(x)$ のグラフ G_0 上の点を (x_0, y_0) とすると

（１）x 軸方向に a，y 軸方向に b 平行移動したグラフの式は

$x=x_0+a$，$y=y_0+b$，$y_0=f(x_0)$ より，$y-b=f(x-a)$．

任意の x について $f(x-a)=f(x)$ となる $a\ (\neq 0)$ が存在するとき，f を周期関数，$|a|$ の最小値を周期という．

（２）原点を中心に x 軸方向に $a\ (\neq 0)$ 倍，y 軸方向に $b\ (\neq 0)$ 倍したグラフの式は

$x=ax_0$，$y=by_0$，$y_0=f(x_0)$ より，$\dfrac{y}{b}=f\left(\dfrac{x}{a}\right)$．

（３）原点に関して対称移動したグラフの式は

$x=-x_0$，$y=-y_0$，$y_0=f(x_0)$ より，$-y=f(-x)$．

任意の x について $f(-x)=-f(x)$ が成立するとき，f を奇関数という．

（４）y 軸に関して対称移動したグラフの式は

$x=-x_0$，$y=y_0$，$y_0=f(x_0)$ より，$y=f(-x)$．

任意の x について $f(-x)=f(x)$ が成立するとき，f を偶関数という．

$f(x)$，$f(-x)$ が定義されていれば，つねに $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$．

（５）直線 $y=x$ に関して対称移動したグラフの式は

$x=y_0$，$y=x_0$，$y_0=f(x_0)$ より，$x=f(y)$．

で求められる．同様に，G_0 を点 (a, b) に関して対称移動したグラフの式は $\dfrac{x+x_0}{2}=a$，$\dfrac{y+y_0}{2}=b$，$y_0=f(x_0)$ から

$$2b-y=f(2a-x) \tag{6.1}$$

と表わせることが分かる．また，

$$\frac{y+y_1}{2}=a\left(\frac{x+x_1}{2}\right)+b,\quad a=-\frac{x-x_1}{y-y_1} \tag{6.2}$$

で定められる x_1，y_1 を $x_1=g(x, y)$，$y_1=h(x, y)$ と表わせば，(x_1, y_1) を G_0 上の点とする（条件 $y_1=f(x_1)$ を加える）ことによって，G_0 を直線 $y=ax+b$ に関して対称移動したグラフの式 $h(x, y)=f(g(x, y))$ が得られる．

$f(x)=x^2$（$x\geq 0$）とすると，任意の y（$y\geq 0$）に対して $y=f(x)$ となる x が一意に定まるので，この x を y の関数と考え，$f^{-1}(y)$ で表わし，f^{-1} を f の逆関数という．x を $f(x)$ に対応

付ける機械を考えると，この場合は

f　：入力（負でない実数）を２乗した数を出力する機械

f^{-1}：入力（負でない実数）の負でない方の平方根を出力する機械

と考えればよい[2]．変数はすべて x で表わし，「$f(x)$ の逆関数は $f^{-1}(x)$ である」ということも多い．この表現は「$f^{-1}(x)$ の x に $f(x)$ を代入した式は x に等しい」ことを意味している．

$y=f^{-1}(x)$ のグラフ上の点を (x_1, y_1) とすると，$x_1=f(y_1)$ であるから点 (y_1, x_1) は $y=f(x)$ のグラフ上にある．すなわち，$y=f^{-1}(x)$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称である．

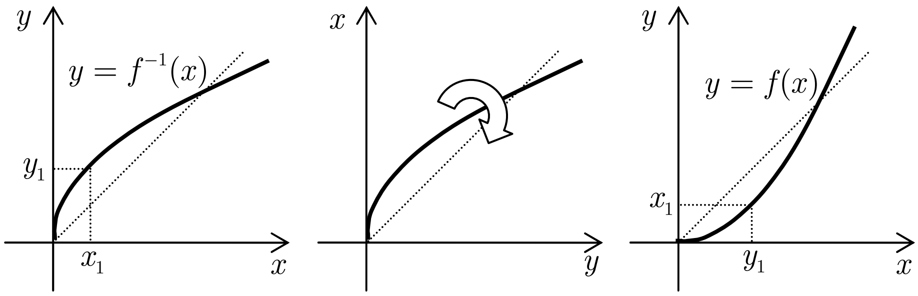


図 6.1　逆関数のグラフ

補足：$a \le x \le b$ である任意の x について $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$ であれば，f は区間 $[a, b]$ で連続であるといい，$a \le x_1 < x_2 \le b$ である任意の x_1，x_2 について $f(x_1) < f(x_2)$ であれば，f は区間 $[a, b]$ で（狭義の）単調増加であるという．また，$x_1 \ne x_2$ である任意の x_1，x_2 について $f(x_1) \ne f(x_2)$ が成立するとき，$f(x)$ を x に対応付ける関数が存在する．これを f の逆関数といい，f^{-1} で表わす．f が区間 $[a, b]$ で連続かつ（狭義の）単調増加であれば区間 $[f(a), f(b)]$ を定義域とする f^{-1} が存在する．

７．まとめ

多くの文字を含む式の扱いに慣れるように，直流の電気回路を対象とし，電流や抵抗値を変数とした式を用いて，１次関数と２次関数の性質を復習した．また，

（１）線形の方程式を重ね合わせの理を用いて解き，線形性を利用した解法が応用上非常に重要であること，微分の本質は１次近似であることを補足で述べた．

（２）関数とは対応付けであることを $f(x)$ でなく f を用いることで強調した．このことは $f(x)$ の逆関数を $f^{-1}(x)$ で表わす理由を理解する助けになる．

この他，あまり特徴な記述はないが，なるべくグラフを用いて説明することに努めた．

補足：(教員用であるが，学生諸君にもおぼろげながら主張が伝わると思われる．)

算数では日常生活に関連する各種の‘応用問題’が使われているが，数学では‘応用問題’の大半は物体の運動や面積，体積の計算であり，例えば工学上極めて重要な複素数についてもその

重要性を知り難い．早めに複素数に親しむためには電気回路への応用を示すことが有効であり，三角関数もオイラーの公式と関連付けて理解することが望ましい．行列，行列式についても，未知数の数に等しい１次方程式が１次独立でないとき，単なる数値例ではなぜこのような連立１次方程式を考えるのか分かりにくいが，キルヒホフの第２法則から閉路方程式を立てることによってその意味を理解できる．また，物体の運動の解析に必要な行列は３次までであるが，電気回路では(m, n)行列が自然な形で導入できる．さらに，コイルやコンデンサのモデルを用いれば，微分，積分の簡単な例から複雑な例まで容易に示すことができる．

工学部で扱う数学で応用例を積極的にとり入れた教科書を作成するとき，理論の必要性を実感させるには物体の運動や面積，体積の計算だけでは難しい．ただし，複数の分野から応用例を選ぶ場合，章ごとに応用分野を絞って相互に関連のある複合的な例題群を作成し，個々の例題の理解が深まるように工夫することが望ましい．各章の構成としては，例えば，

（０）準備として応用例なしで，複素数，初等関数，確率等について高校数学を復習する．
（１）１変数の微積分は時刻を変数とし，力学への応用を示す．
（２）線形代数では直流回路への応用を示す．
（３）１変数の微積分を複素関数に発展させ，交流回路，制御システムへの応用を示す．
（４）1 変数の微積分，線形代数を多変数の微積分に発展させ，流体，電磁気等への応用を示す．
（５）高校数学の確率・統計を発展させ，データ解析，管理工学への応用を示す．
（６）高校数学の代数を離散数学に発展させ，線形符号等への応用を示す．

は比較的無難な案である．

参考文献

[1]　末武国弘，基礎電気回路Ｉ，培風館，1971.
[2]　江見圭司，江見善一，矢島彰，基礎数学のⅠⅡⅢ，共立出版，2005.