２．連立１次方程式

I_1，I_2を未知数とする連立方程式(1.6)，(1.7)は，x，yを未知数とする連立方程式

$$ax + by = p \tag{2.1}$$

$$cx + dy = q \tag{2.2}$$

の$b = -c$の場合に相当する（まず$I_1 - I_2$を求めると計算が少し簡単になる）．式(2.1)，(2.2)の$ad - bc \neq 0$のときの解は

$$x = \frac{pd - bq}{ad - bc} \tag{2.3}$$

$$y = \frac{aq - pc}{ad - bc} \tag{2.4}$$

であり，行列を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

と表わされるが，通常の解法についてはここでは省略し，以下では「重ね合わせの理」を用いた解法について説明する．

$$ax' + by' = p \tag{2.6}$$

$$cx' + dy' = 0 \tag{2.7}$$

$$ax'' + by'' = 0 \tag{2.8}$$

$$cx'' + dy'' = q \tag{2.9}$$

とすると，

$$a(x' + x'') + b(y' + y'') = p \tag{2.10}$$

$$c(x' + x'') + d(y' + y'') = q \tag{2.11}$$

である．すなわち，連立方程式(2.6)，(2.7)の解x'，y'と連立方程式(2.8)，(2.9)の解x''，y''を用いて連立方程式(2.1)，(2.2)の解$x' + x''$，$y' + y''$が得られる（x'/p，y'/p，x''/q，y''/qは式(2.5)の逆行列の要素に等しい）．

例 2.1　図 1.2 の回路で$E_2 = 0$のときのI_1を$I_1{}'$で表わすと，回路図から直接

$$I_1{}' = \frac{E_1}{R_1 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}}$$

が得られる．同様に$E_1 = 0$のときのI_1を$I_1{}''$で表わすと，E_1の値がa倍，E_2の値がb倍になったときのI_1の値は$aI_1{}' + bI_1{}''$に等しい．

より複雑な構成の直流回路に対するキルヒホフの電圧則を表わす1次独立な閉路の選び方や，線形回路の特徴を活用したテブナンの定理の証明を復習することにより，連立1次方程式の解の性質について理解を深めることを期待する．

補足：重ね合わせは各種の線形方程式に適用できる基本的な技法である．工学部で学ぶ回路やシステムに関する理論の多くは線形性を前提としている．例えば,「線形・時不変なシステムの出力は入力とインパルス応答の畳み込み積分である」という性質も重ね合わせの原理で証明される．なお，f が線形であるとは $f(x+y)=f(x)+f(y)$，$f(ax)=af(x)$ が成立することをいい，行列による変換や微分，積分はいずれも線形の演算である（正確な表現は割愛）．