３．１次関数

a，b は値が決まっている数（定数），x はいろいろな値を取りうる数（変数）であるとき，x の値を決めれば式 $ax+b$ の値も決まる．そこで，x を入力すれば（入力を a 倍して b を加え）$ax+b$ を出力する機械を考えてこれを f で表わし，入力が x のときの出力を $f(x)$ で表わすと，例えば $f(2)=2a+b$，$f(-3)=-3a+b$ である．一般に，関数 f とは**このような対応付けを行う機械のようなもの**と考えてよく，入力 x のとり得る値の集合を f の定義域，出力 $f(x)$ のとり得る値の集合を値域という．また $y=f(x)$ であるとき，xy 平面上に点 $(x, f(x))$ をプロットして得られる曲線（直線を含む）を f のグラフ（あるいは $y=f(x)$ のグラフ）という．

例 3.1 任意の実数 x に対してこれを四捨五入した整数 $f(x)$ に対応させる関数 f の定義域はすべての実数（実数の集合），値域はすべての整数（整数の集合）である．

簡単のため，x を $f(x)$ に対応させる関数 f を「関数 $f(x)$」ということが多い．例えば関数 x^2+1 とは $f(x)=x^2+1$ である f を意味する．とくに $f(x)$ が $ax+b$ の形であらわされるとき，f や $ax+b$ を１次関数という．

例 3.2 式(1.5)で $R_1=200$，$R_2=300$ とし，E を変数とすると，$I=0.002E$ と表わされ，E の値を決めると I の値も決まる．E と I の関係は表 3.1 のように表わされ，$I=0.002E$ のグラフは図 3.1 のようになる．

表 3.1　電圧と電流の関係

E	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	$\cdots$
I	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	$\cdots$

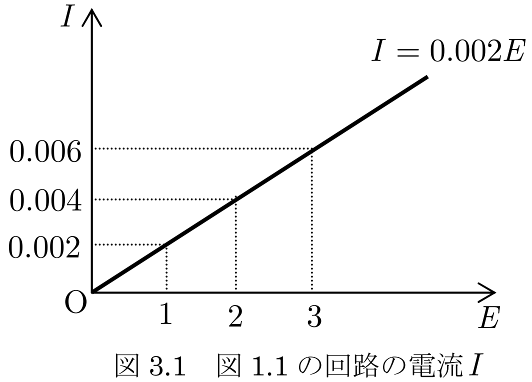

図 3.1　図 1.1 の回路の電流 I

原点 $(0, 0)$，点 $(E, 0)$，点 (E, I) のなす三角形はすべて３辺の比が一定で互いに相似であるからこのグラフが原点を通る直線であることが分かる．

例 3.3 式(1.8)で $R_1=R_2=100$，$R_3=200$ とすると

$$I_1=\frac{(1+2)\times 10^2 E_1-2\times 10^2 E_2}{(1\times 1+1\times 2+2\times 1)\times 10^4}=0.006\,E_1-0.004\,E_2$$

となり，例えば $E_2=3$ の場合，E_1 と I_1 の関係は図 3.2 のようになる．

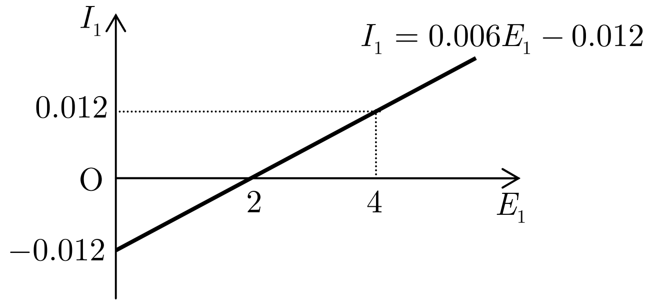

図 3.2　図 1.2 の回路の電流 I_1

$E_1<2$ のときは $I_1<0$ となるが，このことは電流 I_1 が図 1.2 の矢印と逆向きに流れていることを意味する．$I_1=0.006E_1$ のグラフは原点を通る直線であり，$I_1=0.006E_1-0.012$ のグラフはこれを I_1 軸方向に -0.012 平行移動した直線である．

$I_1=f(E_1)=0.006E_1-0.012$ とすると

$$\frac{f(E_1+1)-f(E_1)}{(E_1+1)-E_1}=0.006 \tag{3.1}$$

であり，この値を $I_1=0.006E_1-0.012$ のグラフの傾き（または勾配）という．同様に $y=ax+b$ のグラフの傾きは a であり，x が 1 増加すれば y は a 増加する（$a<0$ のときは $|a|$ 減少する）．

点 (x_1,y_1) を通る傾き a の直線のグラフは $y-y_1=a(x-x_1)$ であるが，$x\neq x_1$ のときの式

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=a \tag{3.2}$$

の方が覚えやすく，上式の両辺に $(x-x_1)$ を掛ければ $x=x_1$ でも成立する $y-y_1=a(x-x_1)$ が得られる．同様に点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) を通る直線のグラフの式も $x_1\neq x_2$，$x\neq x_1$ のときの式

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{3.3}$$

の方が覚えやすい．

補足：　点 b の近く（近傍）で x に依存しない定数 a を用いて $f(b+x)=f(b)+ax$ と近似できる（$x\to 0$ のとき近似誤差が 0 に収束する）とき，a を点 b における微分係数という $\left(a=\dfrac{d}{dx}f(b)\right)$．また，点 (c,d) の近くで x，y に依存しない適当な定数 a，b が存在して

$g(c+x, d+y) = g(c, d) + ax + by$ と近似できるとき，a，b を点 (c, d) における偏微分係数という $\left(a = \dfrac{\partial}{\partial x} g(c, d), a = \dfrac{\partial}{\partial y} g(c, d) \right)$．偏微分係数は $g(c+x, d+y) = g(c, d) + ax + by$ と近似できない場合にも定義されているが，　応用上は上記の（連続偏微分可能な）場合のみ活用できれば十分である．　微分の本質は 1 次近似であるという認識は，後に複素数の関数や作用素の微分を学ぶときに役立つ．