５． ２次関数

$R\,[\Omega]$の抵抗に$I\,[\mathrm{A}]$の電流が流れているときの消費電力(単位時間当たりに消費するエネルギー)は，抵抗の電圧降下$RI\,[\mathrm{V}]$と電流$I\,[\mathrm{A}]$の積$RI^2\,[\mathrm{W}]$であり，回路で消費される電力は各抵抗で消費される電力の総和に等しい．したがって，図 1.1 の回路で消費される電力の総和Pは

$$P = R_1 I^2 + R_2 I^2 \tag{5.1}$$

である．また，図 1.2 の回路の抵抗で消費される電力の総和Pは

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 (I_1 - I_2)^2 \tag{5.2}$$

である．

先に述べたように，図 1.2 の回路の電流は重ね合わせを用いて計算できる．例えば$E_1 = 3$，$E_2 = 2$のときのI_1，I_2は，$E_1 = 3$，$E_2 = 0$のときのI_1'，I_2'と$E_1 = 0$，$E_2 = 2$のときのI_1''，I_2''を用いて$I_1' + I_1''$，$I_2' + I_2''$と表わされる．しかし，$I_1' I_2'' \neq 0$であるから

$$R_1 (I_1' + I_1'')^2 \neq R_1 (I_1')^2 + R_1 (I_1'')^2 \tag{5.3}$$

であり，電力に対して重ね合わせによる解法を用いることはできない．

補足：複数の周波数の電流が流れている交流回路の電力は各周波数成分の電力の和に等しい[1]．

例 5.1　図 1.1 の回路で$R_1 = 200$，$R_2 = 300$のとき，$P = 0.002\,E^2$だから，EとPの関係を表わす例 3.2 のような表を作成すると，下図のグラフが得られる．

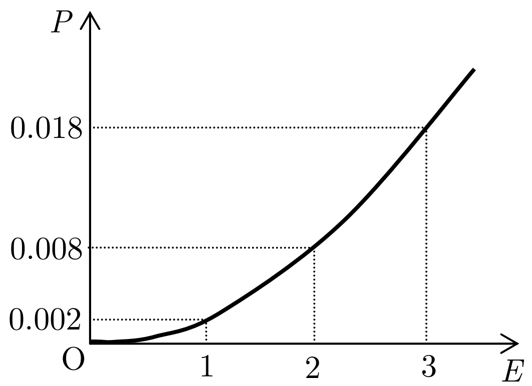

図 5.1　図 1.1 の回路の消費電力

例 5.2　図 1.2 の回路で$R_1 = R_2 = R_3 = R$とすると，式(1.8)，(1.9)のI_1は

$$I_1 = \frac{2E_1 - E_2}{3R}$$

となり，R_1で消費される電力P_1は

$$P_1 = R\left(\frac{2E_1 - E_2}{3R}\right)^2 = \frac{(2E_1 - E_2)^2}{9R}$$

で表わされる．したがって，R と E_2 を一定にして E_1 を変化させたときの P_1 を E_1 の関数とみなすことができる．

一般に a，b，c が定数で $a \neq 0$ のとき $f(x) = ax^2 + bx + c$ である f を２次関数という．$f(x)$ は

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{5.4}$$

と変形できるから，$x = -\dfrac{b}{2a}$ で最大または最小となる（$a > 0$ のとき最大，$a < 0$ のとき最小）．

$y = f(x)$ のグラフは　$y = ax^2$　のグラフを x 軸方向に $-\dfrac{b}{2a}$，　y 軸方向に $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ 平行移動したものに等しい．このことはつぎのようにして証明できる．

$y_1 = ax_1^2$ を満足する (x_1, y_1) に対して $x_2 = x_1 - \dfrac{b}{2a}$，　$y_2 = y_1 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ で定められる (x_2, y_2) は $y_2 = f(x_2)$ を満足する．すなわち，f のグラフ上にある．逆に $y_3 = f(x_3)$ を満足する (x_3, y_3) に対して $x_3 = x_4 - \dfrac{b}{2a}$，$y_3 = y_4 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$ で定められる (x_4, y_4) は $y_4 = ax_4^2$ を満足し，$y = ax^2$ のグラフ上になければならない．

例 5. 3　$y = 0.5\,x^2$ および $y = 0.5\,(x+2)^2 - 1$ のグラフを図 5.2，図 5.3 に示す．

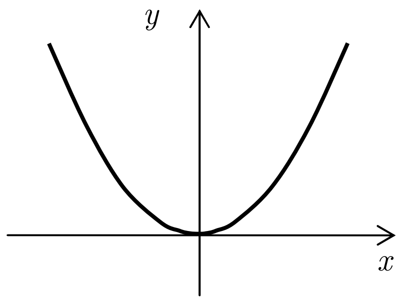

図 5.2　$y = 0.5\,x^2$ のグラフ

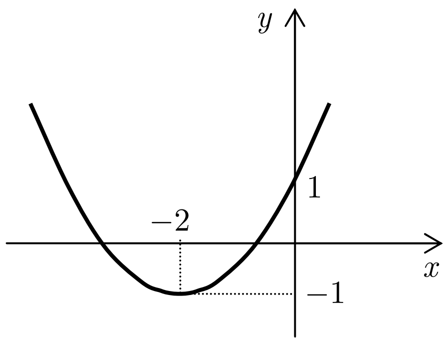

図 5.3　$y = 0.5(x+2)^2 - 1$ のグラフ

$b = 0.5\,a^2$ とすると，$(b-1) + 1 = 0.5\left\{(a-2) + 2\right\}^2$．したがって，点 $(a-2, b-1)$ は $y + 1 = 0.5\,(x+2)^2$ のグラフ上にある．