６．グラフの移動と変形

グラフの平行移動，対称移動，拡大縮小については次のように考えればよい．$y=f(x)$ のグラフ G_0 上の点を (x_0, y_0) とすると

（１）x 軸方向に a，y 軸方向に b 平行移動したグラフの式は

$x=x_0+a$，$y=y_0+b$，$y_0=f(x_0)$ より，$y-b=f(x-a)$．

任意の x について $f(x-a)=f(x)$ となる $a\ (\neq 0)$ が存在するとき，f を周期関数，$|a|$ の最小値を周期という．

（２）原点を中心に x 軸方向に $a\ (\neq 0)$ 倍，y 軸方向に $b\ (\neq 0)$ 倍したグラフの式は

$x=ax_0$，$y=by_0$，$y_0=f(x_0)$ より，$\dfrac{y}{b}=f\left(\dfrac{x}{a}\right)$．

（３）原点に関して対称移動したグラフの式は

$x=-x_0$，$y=-y_0$，$y_0=f(x_0)$ より，$-y=f(-x)$．

任意の x について $f(-x)=-f(x)$ が成立するとき，f を奇関数という．

（４）y 軸に関して対称移動したグラフの式は

$x=-x_0$，$y=y_0$，$y_0=f(x_0)$ より，$y=f(-x)$．

任意の x について $f(-x)=f(x)$ が成立するとき，f を偶関数という．

$f(x)$，$f(-x)$ が定義されていれば，つねに $f(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}+\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$．

（５）直線 $y=x$ に関して対称移動したグラフの式は

$x=y_0$，$y=x_0$，$y_0=f(x_0)$ より，$x=f(y)$．

で求められる．同様に，G_0 を点 (a,b) に関して対称移動したグラフの式は $\dfrac{x+x_0}{2}=a$，$\dfrac{y+y_0}{2}=b$，$y_0=f(x_0)$ から

$$2b-y=f(2a-x) \tag{6.1}$$

と表わせることが分かる．また，

$$\frac{y+y_1}{2}=a\left(\frac{x+x_1}{2}\right)+b,\quad a=-\frac{x-x_1}{y-y_1} \tag{6.2}$$

で定められる x_1，y_1 を $x_1=g(x,y)$，$y_1=h(x,y)$ と表わせば，(x_1,y_1) を G_0 上の点とする（条件 $y_1=f(x_1)$ を加える）ことによって，G_0 を直線 $y=ax+b$ に関して対称移動したグラフの式 $h(x,y)=f(g(x,y))$ が得られる．

$f(x)=x^2$（$x\geq 0$）とすると，任意の y（$y\geq 0$）に対して $y=f(x)$ となる x が一意に定まるので，この x を y の関数と考え，$f^{-1}(y)$ で表わし，f^{-1} を f の逆関数という．x を $f(x)$ に対応付ける機械を考えると，この場合は

f　：入力（負でない実数）を２乗した数を出力する機械

f^{-1}：入力（負でない実数）の負でない方の平方根を出力する機械

と考えればよい[2]．変数はすべて x で表わし，「$f(x)$ の逆関数は $f^{-1}(x)$ である」ということも多い．この表現は「$f^{-1}(x)$ の x に $f(x)$ を代入した式は x に等しい」ことを意味している．

$y=f^{-1}(x)$ のグラフ上の点を (x_1, y_1) とすると，$x_1=f(y_1)$ であるから点 (y_1, x_1) は $y=f(x)$ のグラフ上にある．すなわち，$y=f^{-1}(x)$ のグラフと $y=f(x)$ のグラフは直線 $y=x$ に関して対称である．

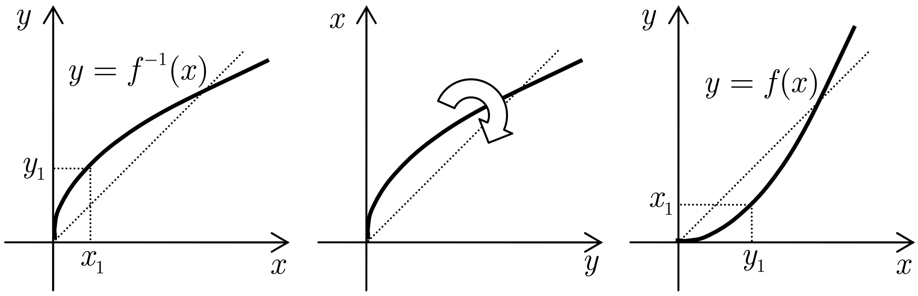

図 6.1　逆関数のグラフ

補足：$a \le x \le b$ である任意の x について $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$ であれば，f は区間 $[a, b]$ で連続であるといい，$a \le x_1 < x_2 \le b$ である任意の x_1，x_2 について $f(x_1)<f(x_2)$ であれば，f は区間 $[a, b]$ で（狭義の）単調増加であるという．また，$x_1 \ne x_2$ である任意の x_1，x_2 について $f(x_1) \ne f(x_2)$ が成立するとき，$f(x)$ を x に対応付ける関数が存在する．これを f の逆関数といい，f^{-1} で表わす．f が区間 $[a, b]$ で連続かつ（狭義の）単調増加であれば区間 $[f(a), f(b)]$ を定義域とする f^{-1} が存在する．