

音速について考えてみよう！

金沢工業大学

中村晃

ねらい

私たちの身の回りにはいろいろな種類の波が存在する．体感できる波もあれば，できない波もある．その中で音は体感できる最も身近な波である．遠くで雷が光ってから雷鳴が届くまで数秒間時間がかかることにより，音の方が光より伝わるのに時間がかかることも経験していると思う．高校の物理の授業で音の伝わる速さ（音速）は約 340 m/s で，詳しく述べると 1 気圧では $331.5+0.6t \text{ m/s}$ （ t は摂氏温度）と温度の関数であると学ぶ．しかし，なぜこのような関係式になるのか詳しく学ぶ機会はない．そこで，本テーマを考えた．

本テーマでは空気の弾性的性質を基本的な式から示し，空気の微視的な圧縮膨張により生じる音の伝わる速さ（音速）を表す $331.5+0.6t \text{ m/s}$ という関係式を単純なモデルを考えて導いていく．多くの数学や物理の知識を基に論理的に考えることにより音速を表す式が導かれていることを理解することにより，公式を単に覚えるのではなく公式を導く過程が大切であることを学ぶ．

目次

1. 空気の弾性的性質
2. 音速を表す式の導出
3. 終わりに

1. 空気の弾性的性質

音は空気が移動して伝わるのではなく，空気の振動がドミノ倒しのように近傍の空気を振動させることにより伝わっていく．このように空気の振動が伝わる速さが音速である．音速を理論的に求めるには，まず空気の性質を知る必要がある．注射器などのピストンに空気を入れてピストンを押すと押し返されるという経験をしたことがあると思う．このように空気はバネと同じような弾性的性質をもっている．以下に空気の弾性的性質について考える．

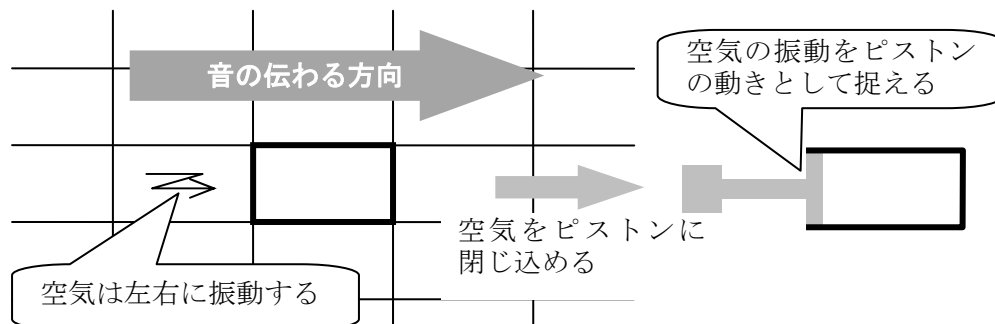


図 1.1 空気性質を考える方法

図 1.1 に示すように, 空気を分割し, その 1 つをピストンの中に詰め込む. 次に図 1.2 に示すように, 詰め込んだ空気を, ピストンを押して圧縮する.

まず, 大気圧 P_0 の空気が入っている断面積 S のピストンを押し込んで Δd 変位させる. その時に必要なピストンを押す力 F を求める (ここでは Δx に比べ Δd は微小とする).

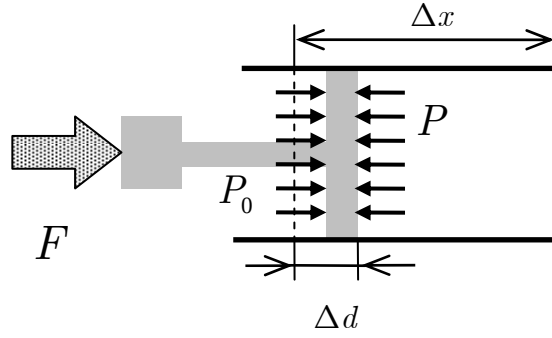


図 1.2 ピストンによる空気の圧縮

ピストンの変位によって, ピストンの中の空気の体積 V_0 は ΔV だけ減少して V になり, 圧力 P_0 は ΔP 増加して P となる (ただし $\Delta V > 0$, $\Delta P > 0$ とする). すなわち,

$$V = V_0 - \Delta V \quad (1.1)$$

$$P = P_0 + \Delta P \quad (1.2)$$

と表すことができる.

ピストンの中の空気は熱の出入りのない断熱変化であったとすると,

$$PV^\gamma = \text{一定} \quad (1.3)$$

(ただし, γ は比熱比で $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, C_v は空気の定積比熱, C_p は空気の定圧比熱である)

という関係がある (熱力学の断熱変化を勉強する必要がある).

ピストンを押す前後で(1.3)式が成り立つので,

$$P_0 V_0^\gamma = P V^\gamma \quad (1.4)$$

の関係が得られる.

ピストンの寸法より,

$$V_0 = S \Delta x \quad (1.5)$$

$$V = S (\Delta x - \Delta d) \quad (1.6)$$

である.

(1.4)式に(1.2)式, (1.5)式, (1.6)式を代入すると,

$$P_0 (S \Delta x)^\gamma = (P_0 + \Delta P) \{S (\Delta x - \Delta d)\}^\gamma$$

が得られ, これを以下のように変形する.

$$\begin{aligned} P_0 (S \Delta x)^\gamma &= (P_0 + \Delta P) \left\{ S \Delta x \left(1 - \frac{\Delta d}{\Delta x} \right) \right\}^\gamma \\ P_0 (S \Delta x)^\gamma &= (P_0 + \Delta P) (S \Delta x)^\gamma \left\{ \left(1 - \frac{\Delta d}{\Delta x} \right) \right\}^\gamma \end{aligned} \quad (1.7)$$

$\frac{\Delta d}{\Delta x}$ は微小なので、 h が微小なときの 1 次近似式 $(1+h)^\alpha \doteq 1+\alpha h$ を用いると(1.7)式は、

$$P_0 (S\Delta x)^\gamma \doteq (P_0 + \Delta P)(S\Delta x)^\gamma \left(1 - \gamma \frac{\Delta d}{\Delta x}\right)$$

となる。

さらに、両辺を $(S\Delta x)^\gamma$ で割ると、

$$P_0 \doteq (P_0 + \Delta P) \left(1 - \gamma \frac{\Delta d}{\Delta x}\right)$$

となり、さらに式を展開して整理していくと、

$$\begin{aligned} P_0 &\doteq P_0 + \Delta P - P_0 \gamma \frac{\Delta d}{\Delta x} - \Delta P \gamma \frac{\Delta d}{\Delta x} \\ \Delta P - P_0 \gamma \frac{\Delta d}{\Delta x} - \gamma \Delta P \frac{\Delta d}{\Delta x} &\doteq 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

となる。

$\Delta \xi$ が微小なので ΔP も微小である。よって、 $\gamma \Delta P \frac{\Delta d}{\Delta x}$ は 2 次の微小量となり他の項と比較すると無視することができるぐらい微小になる。よって、(1.8)式は、

$$\begin{aligned} \Delta P - P_0 \gamma \frac{\Delta d}{\Delta x} &\doteq 0 \\ \Delta P &\doteq \frac{P_0 \gamma}{\Delta x} \Delta d \end{aligned} \quad (1.9)$$

となる。今後、(1.9)式の $\doteq$ は $=$ とみなせるとして、

$$\Delta P = P_0 \gamma \frac{\Delta d}{\Delta x} \quad (1.10)$$

を用いることにする。

ピストンの柄の部分の力の釣り合いを考えると、

$$P_0 S + F = PS \quad (1.11)$$

の関係式が得られる。

(1.11)式に(1.2)式を代入すると、

$$\begin{aligned} P_0 S + F &= (P_0 + \Delta P) S \\ P_0 S + F &= P_0 S + \Delta P S \\ \Delta P S - F &= 0 \\ \Delta P &= \frac{F}{S} \end{aligned} \quad (1.12)$$

となる。(1.12)式を(1.10)式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{F}{S} &= P_0 \gamma \frac{\Delta d}{\Delta x} \\ F &= \frac{P_0 S \gamma}{\Delta x} \Delta d \end{aligned} \quad (1.13)$$

が得られる。

この(1.13)式より、ピストンの変位量 Δd はピストンを押す力 F に比例している。すなわち、ピストンの中にある空気はバネと同じような弾性的性質を示す。

2. 音速を表す式の導出

次に、断面積 S のチューブの中を伝わる音について考えていくことにする。

音は、チューブの中の空気が移動して伝わるのではなく、空気がチューブの長さ方向に振動し、この振動が近傍の空気をドミノ倒しのように次々と振動させることにより伝わる。よって、チューブの中の空気を、図 2.1 のように細かく分割して長さ Δx の微小体積要素（図 1.2 のピストン内部の空気）が連結したものと考え、空気の振動をピストンの変位と置き換えて、音の伝達を考えることにする。

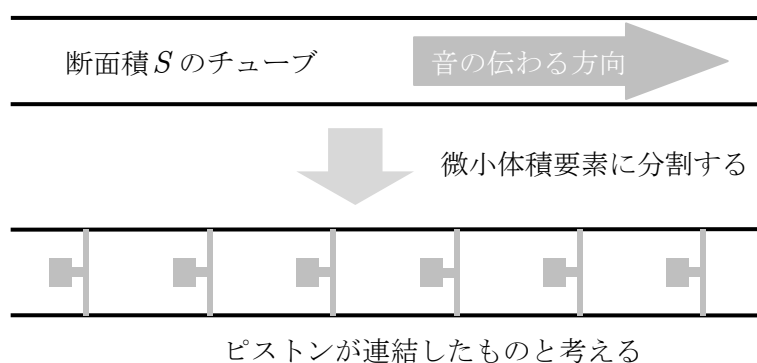


図 2.1 音速を求めるためのモデル

まず、チューブの中の空気に音が伝わり始めた状況、すなわち、ある部分の空気が振動（変位）し始めた状況を図 2.2 のモデルを用いて説明する。

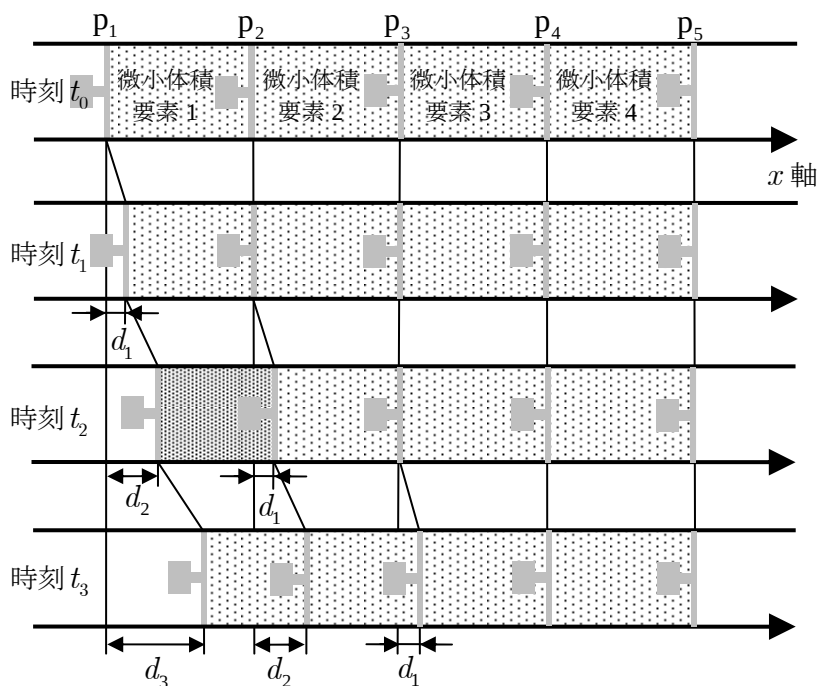


図 2.2 空気の振動（変位）が伝わる説明図

音の伝わる方向を x 軸の正方向とする．音が伝わる前の各微小体積要素の x 軸方向の長さを Δx とし，微小体積要素の境界には仮想のピストンが存在すると考える．さらに，ピストンは時間間隔 Δt で以下のように変化するとする．音がチューブの左から伝わってきて時刻 t_0 で音が微小体積要素 1 の左端のピストン p_1 に到達しピストンの変位が始まり， Δt の間に d_1 だけピストン p_1 が変位する．また，波は時間 Δt の間に Δx 進むとする．ピストン p_1 の変位が， t_0 で 0， t_1 で d_1 ， t_2 で d_2 ， t_3 で d_3 と変化すると，微小体積要素 2 の左端のピストン p_2 の変位は t_0 ， t_1 で 0， t_2 で d_1 ， t_3 で d_2 に変化し，微小体積要素 3 の左端のピストン p_3 の変位は t_0 ， t_1 ， t_2 で 0， t_3 で d_1 に変化する．このようにそれぞれのピストン（微小体積要素の境界）が変位することにより，すなわち，空気が局部的に圧縮，膨張することにより，空気の振動である音は伝わっていく．

音が伝わる様子を図 2.3 に示す． x_1 ， x_2 ， $\cdots$ ， x_5 は，仮想ピストン p_1 ， p_2 ， $\cdots$ ， p_5 の音が伝わる前の x 軸上の位置のことである．ピストン p_1 （微小体積要素 1 の左端）の変位の時間的变化（振動）が x 軸方向に伝わっていく様子がよくわかる．

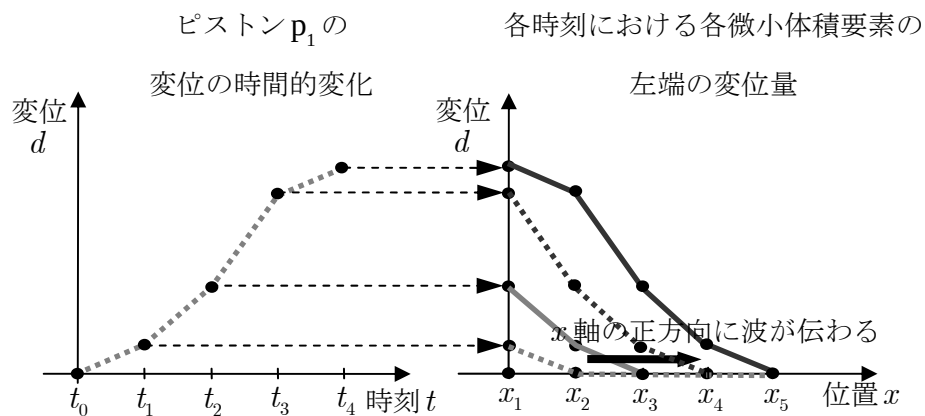


図 2.3 音が伝わる様子

図 2.3 の 2 つのグラフを 1 つにまとめて平面的に表現したものが，図 2.4 である．縦の並びが変位の時間的变化，横の並びが変位の x 軸方向の変化を示す．

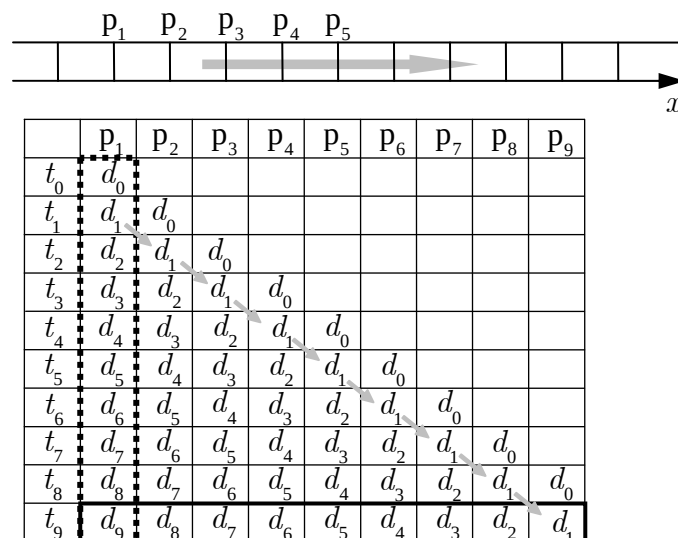


図 2.4 音が伝わる様子

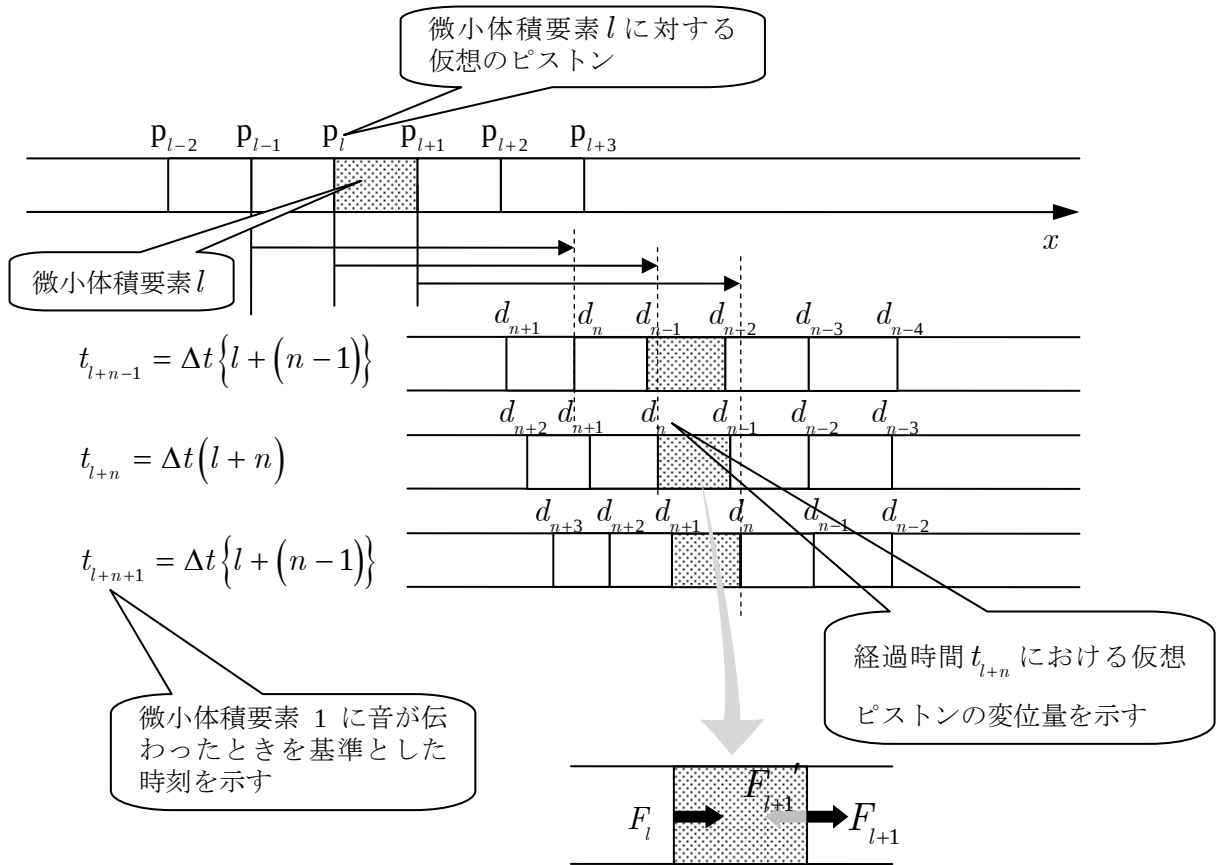


図 2.5 音速を求めるモデル

音の伝わる速さを、図 2.5 を用いて導くことにする。

微小体積要素 l の運動方程式は、

$$ma = F \quad (2.1)$$

(ただし、 m は微小体積要素の質量、 a は微小体積要素 l の x 軸方向へ移動する加速度、 F は微小体積要素 l に働く外力である.)

である。

ρ を空気の密度、 S をチューブの断面積とすると、 m は、

$$m = \rho S \Delta x \quad (2.2)$$

と表される。

Δt が極微小な値であると Δx も極微小な値となり、微小体積要素の重心の速度は微小体積要素の右端の速度と同じであるとみなせる。

時刻 t_{l+n-1} から t_{l+n} の間の微小体積要素 l の平均の速度 v_{l+n-1} は、

$$v_{l+n-1} = \frac{d_{n-1} - d_{n-2}}{\Delta t} \quad (2.3)$$

となる。 Δt が極微小な値であるので、 Δt の値は t_{l+n-1} に比べると無視でき、速度 v_{l+n-1} は時刻 t_{l+n-1} の速度とみなすことができる。

同様に t_{l+n} の間の微小体積要素 l の平均の速度 v_{l+n} は

$$v_{l+n} = \frac{d_n - d_{n-1}}{\Delta t} \quad (2.4)$$

となる。

時刻 t_{l+n-1} から時刻 t_{l+n} の間の微小体積要素 l の平均の加速度 a_{l+n} は,

$$a_{l+n} = \frac{v_{l+n} - v_{l+n-1}}{\Delta t} \quad (2.5)$$

である. Δt を極微小な値として考えると, 速度のときと同様に加速度 a_{l+n} は時刻 t_{l+n} における加速度であるとみなせる (加速度 a_{l+n} は時刻 t_{l+n-1} における加速度とみなすこともできる). よって, (2.3)式, (2.4)式を(2.5)式に代入すると,

$$a_{l+n} = \frac{v_{l+n} - v_{l+n-1}}{\Delta t} = \frac{\frac{d_n - d_{n-1}}{\Delta t} - \frac{d_{n-1} - d_{n-2}}{\Delta t}}{\Delta t} = \frac{d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}}{(\Delta t)^2} \quad (2.6)$$

となる.

運動方程式(2.1)式の F は微小体積要素 l に働く外力の和であるので, この場合,

$$F = F_l + F_{l+1}' \quad (2.7)$$

(ただし, F_l は微小体積要素 l の左端界面に働く外力, F_{l+1}' は微小体積要素 l の右端界面に働く外力で, 微小体積要素 $l+1$ の左端界面に働く外力 F_{l+1} と作用, 反作用の関係にある.)

となる. 微小体積要素 l の長さ Δx の外力による変化 Δd_l は d_n と d_{n-1} 差となるので(1.13)式より,

$$F_l = \frac{P_0 S \gamma}{\Delta x} \Delta d_n = \frac{P_0 S \gamma}{\Delta x} (d_n - d_{n-1}) \quad (2.8)$$

となる. 同様に考えて,

$$F_{l+1} = \frac{P_0 S \gamma}{\Delta x} \Delta d_{l+1} = \frac{P_0 S \gamma}{\Delta x} (d_{n-1} - d_{n-2}) \quad (2.9)$$

となる. F_{l+1}' は F_{l+1} の反作用なので符号が変わり,

$$F_{l+1}' = -\frac{P_0 S \gamma}{\Delta x} \Delta d_{l+1} = -\frac{P_0 S \gamma}{\Delta x} (d_{n-1} - d_{n-2}) \quad (2.10)$$

となる. よって, 外力の総和 F は(2.7)式に(2.8)式, (2.10)式を代入することにより,

$$F = \frac{P_0 S \gamma}{\Delta x} (d_n - d_{n-1}) - \frac{P_0 S \gamma}{\Delta x} (d_{n-1} - d_{n-2}) = \frac{P_0 S \gamma}{\Delta x} (d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}) \quad (2.11)$$

となる.

(2.2)式, (2.6)式, (2.11)式を(2.1)式に代入すると ((2.6)式の a_{l+n} を(2.1)式 a に代入している),

$$\rho S \Delta x \frac{d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}}{(\Delta t)^2} = \frac{P_0 S \gamma}{\Delta x} (d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}) \quad (2.12)$$

となる. この(2.12)式を変形すると,

$$\begin{aligned}\frac{\Delta x^2}{\Delta t^2} &= \frac{P_0 \gamma}{\rho} \\ \frac{\Delta x}{\Delta t} &= \sqrt{\frac{P_0 \gamma}{\rho}}\end{aligned}\tag{2.13}$$

となる.

波は時間 Δt の間に Δx 進むので $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ は音の伝わる速さ v になる.

微小体積要素の気体の状態方程式 $P_0 V = nRT$ より

$$P_0 = \frac{nRT}{V}\tag{2.14}$$

(ただし, R は気体定数, T は絶対温度, n はモル数である.)

となる.

(2.14)式を(2.13)式に代入すると,

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{\frac{\frac{nRT}{V} \gamma}{\rho}} = \sqrt{\frac{RT \gamma}{\frac{V \rho}{n}}}\tag{2.15}$$

となる. $\frac{V \rho}{n}$ は 1 モル当たりの空気の質量になり, これを M とおくと(2.15)式は,

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \sqrt{\frac{RT \gamma}{M}}\tag{2.16}$$

となり音速を求める式が導かれた.

絶対温度 T と摂氏温度 t の関係 $T = 273 + t$ を(2.16)式に代入し式を変形すると,

$$\begin{aligned}v &= \sqrt{\frac{RT \gamma}{M}} \\ &= \sqrt{\frac{R \gamma}{M} (273 + t)} \\ &= \sqrt{\frac{273 R \gamma}{M}} \sqrt{1 + \frac{t}{273}} \\ h \text{ が微小なときの 1 次近似式 } (1+h)^\alpha &\doteq 1 + \alpha h \text{ の関係を用いると} \\ &\doteq \sqrt{\frac{273 R \gamma}{M}} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{273} \right)\end{aligned}\tag{2.17}$$

ここで, R は気体定数で $8.31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, M は空気 1 モルの質量で $2.89 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, γ は空気の定圧比熱と定積比熱の比で約 1.4 である. これらの値を(2.17)式に代入すると,

$$v \doteq 331.5 + 0.6t\tag{2.18}$$

となる. この式より 0°C で, 音速 v の値は約 331.5 m/s となる. この値は, 音速の実測値とよく一致している.

3. おわりに

以上説明してきたように，物理量の極微小な変化 (Δt , Δx など)，すなわち極限の考え方を利用して音速を表す式 $331.5+0.6t$ m/s ((2.18)式) を導いた．この考え方は微分の重要な考え方である．したがって，説明した内容の理解を深めるためにも微分の基礎をよく学んでほしい．また，音速を表す $v \doteq 331.5 + 0.6t$ のような単純な理論的に求める際，気体の状態方程式，気体の断熱変化，運動方程式などいくつかの物理的な基礎知識が基になっていることを知ってほしい．みなさんが物理を学ぶ際には多くの公式が出てくるが，今後その背後にある基礎知識を探求することを期待する．

参考文献

- [1] 寺沢 徳雄，振動と波動，岩波書店，1984 年．
- [2] 小橋 豊，音と音波，裳華房，1971 年．