力学と電気の現象を数式で考えよう

金沢工業大学　基礎教育部
三嶋 昭臣

ねらい

私たちが身のまわりで出くわす様々な現象は，一見異なるように見えても，同じような数式で表され，説明できることがある．たとえば，地上数百 m でできた雨粒が初速度 0 で落下すると，その速度は次第にある値に近づく．また，電気回路のスイッチを閉じると，充電するキャパシター（コンデンサー）に蓄えられる電気量は次第にある値に近づく．ところが，この 2 つの現象は，それぞれ同じ形式の微分方程式で表され，速度と電気量は同じ形式の指数関数で表される．

現象を表す数式の意味が分かれば，現象や法則，自然の理解につながる．また，現象や法則が工業などに応用されることもある．上述の力学と電気の現象を表す 2 つの数式は，比較・考察すれば，数学的に類似していることが分かる．このことを理解するために，本テーマ名にした．

本テーマの内容を考察して, 自然は, 複雑そうに見えても簡単な数式に表すことができるとか, 類似性があるとか，すばらしいとか，美しいなどと少しでも感動するならば幸いである．このように不思議さや魅力を感じて，自然現象の背後にある普遍性を詳しく知りたくて，数理に関する科目を学ぶならば幸甚である．また，このような自然現象を応用できないかと，学ぶ思いを強くして，将来の技術者を目指すならば，著者としてありがたい．

現象を表す数式の意味が理解できるように, 用いる数学と物理を予めなるべく詳しく説明した．高校・大学の教科書では，広い範囲の事柄を扱うので，それらの比較・考察があまりなされていない．しかし，この本は副読本であるという特徴を生かすために，2 つの現象に絞って，数学と物理を連携して記述し，比較・考察をした．

高校生・大学生の皆さんが，自分の分かる箇所は飛ばして読むことができるように配慮し記述した．たとえば，1 章〜3 章の数学を理解している人は，4 章〜6 章を読むことを薦める．

目次

この副読本には，本テーマの内容に関係するテーマが多くある．ぜひ，参考にして頂きたい．
テーマ 22. 物理的現象と微分・積分に，力学の現象が取り上げられて，他の現象の考察もある．

1. 指数関数とそのグラフ

x が$\cdots, -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ などいろいろな値をとる数 x を**変数**という．変数に対して，変わらない数を**定数**という．変数 x の値を 1 つ決めると，$y=f(x)$ によって，変数 y の値が 1 つ決まるとき，y または $f(x)$ は x の**関数**であるという．

> a を 1 ではない正の定数とし，x を変数とするとき，
> $$a^x$$
> を，a を底とする x の**指数関数**という．

(1.1)

a^x の a の部分を**底**(てい)，x の部分を**指数**(しすう)という．e を底とする x の指数関数は，e^x である．ただし，e は**ネイピアの数**といい，無理数であり，その値は $e=2.71828\cdots$ である．

例 1.1　x を変数とする指数関数の例を 5 つ挙げよ．

解　例えば，2^x，$2^{-x}\left(=\dfrac{1}{2^x}\right)$，$e^x$，$e^{-x}$，$ae^{bx}$　（a，b は 0 ではない定数）など．

例 1.2　$y=-e^{-x}$（$x\geq 0$）について，数表を作りグラフの概略図を描け．$e=2.718$ として，$x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ での y の値を四捨五入して小数第 3 位まで求めて，数表を作れ．

解　$x=0$ のとき，$y=-2.718^0=-1$，$x=1$ のとき，$y=-2.72^{-1}=-\dfrac{1}{2.72}\fallingdotseq-0.368$

$x=2$ のとき，$y=-2.72^{-2}\fallingdotseq-\dfrac{1}{7.40}\fallingdotseq-0.135$，$x=3$ のとき，$y=-2.72^{-3}\fallingdotseq-\dfrac{1}{20.1}\fallingdotseq-0.050$，

$x=4$ のとき，$y=-2.72^{-4}\fallingdotseq-\dfrac{1}{54.7}\fallingdotseq-0.018$，$x=5$ のとき，$y=-2.72^{-5}\fallingdotseq-\dfrac{1}{149}\fallingdotseq-0.007$

数表は，表 1.1 のとおりである．

表 1.1　$y=-e^{-x}$（$x\geq 0$）の数表

x	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	－1	－0.368	－0.135	－0.050	－0.018	－0.007	$\cdots$

xy 座標系の平面にプロットした点を滑らかに結べば，図 1.1 のグラフが得られる．

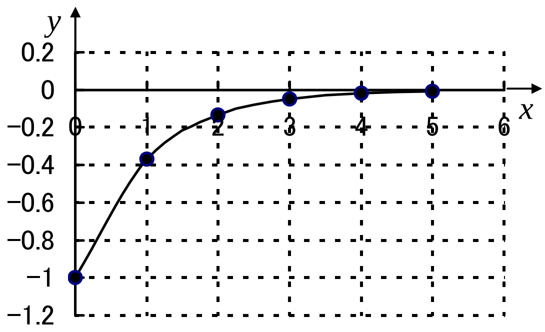


図 1.1　$y=-e^{-x}$（$x\geq 0$）のグラフ

x の値が限りなく大きくなる（$x \to \infty$）とき，y の値が限りなく定数 c に近づく（$y \to c$）場合，直線 $y = c$ を**漸近線**という．例 1.2 では， $x \to \infty$ のとき， $-e^{-x} \to 0$ であるから， $y \to 0$ となる．したがって， $y = -e^{-x}$ の漸近線は x 軸である．

例 1. 3　$y = a\left(1 - e^{-\frac{1}{b}x}\right)$（$x \geq 0$）のグラフの概略図を描け．ただし，$a$，$b$ はともに正の定数とする．　　　漸近線は何か． $x = b$ のとき，y の値は a の約何%であるか．

解　$y = -ae^{-\frac{1}{b}x}$ のグラフを，y 軸方向に a だけ平行移動すれば，図 1.2 のグラフが得られる．

$x \to \infty$ では, $e^{-\frac{1}{b}x} \to 0$ であるから，$y \to a$ である．したがって，漸近線は $y = a$ である．
$x = b$ のとき，

$$y = a\left(1 - e^{-\frac{b}{b}}\right) = a\left(1 - 2.72^{-1}\right)$$

$$\fallingdotseq a(1 - 0.368) \fallingdotseq 0.63a$$

したがって， $x = b$ のとき，y の値は a の約 63%である．

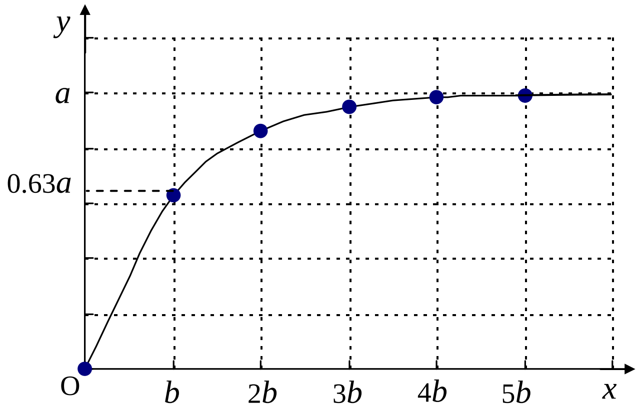


図 1.2　$y = a\left(1 - e^{-\frac{1}{b}x}\right)$（$x \geq 0$）のグラフ

時刻 t（$t \geq 0$）の関数

$$y = a\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) \quad （a，\tau \text{ はともに正の定数とする}） \tag{1.2}$$

において，正の定数 τ を**時定数**という．この指数関数のグラフは図 1.3 になる．

$t = \tau$ のとき， $e^{-\frac{1}{\tau}\tau} = e^{-1} = 0.37$ となるから，y の値は a の約 63%である．

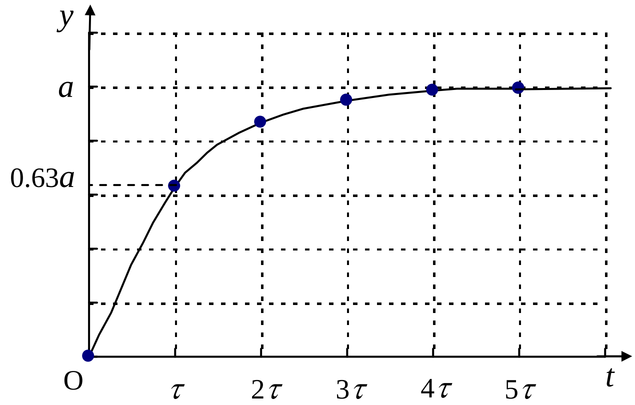


図 1.3　$y = a\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$（$t \geq 0$）のグラフ

指数関数 $y = a^x$ において，与えられた正の数 M に対して，

$$a^p = M \tag{1.3}$$

となる実数 p がただ 1 つ決まる．この p を

$$p = \log_a M \tag{1.4}$$

と表し，$\log_a M$ を，a を**底**とする M の**対数**という．M を対数 $\log_a M$ の**真数**という．e を底とする M の対数は，**自然対数**といい，$\log_e M$ である．以後，自然対数を，$\log M$ と表す．電卓では，自然対数は $\ln M$ と表し，10 を底とする**常用対数**は $\log M$ と表す.

> a を 1 ではない正の定数とし，x を変数とするとき，
>
> $$\log_a x \tag{1.5}$$
>
> を，a を底とする x の**対数関数**という．ただし，$x > 0$ である．

$\log_a x$ の a の部分を**底**，x の部分を**真数**という．e を底とする x の対数関数は，$\log_e x$ である．以後，e を省いて，$\log x$ と表す.

2. 微分法と速度，加速度

$y = f(x)$ の**導関数**は y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$f'(x)$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ と表し，次式で定義される.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2.1}$$

x から $x + \Delta x$ に変化したとき，Δx を x の**増分**という．y から $y + \Delta y$ に変化したとき，Δy を y の**増分**という．Δy を Δx で割った商 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ を**平均変化率**という．$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ は，$y = f(x)$ のグラフの点(x, y)と点$(x + \Delta x, y + \Delta y)$を結んだ直線の傾きを表している．点$(x, y)$の 1 点を通り $y = f(x)$ のグラフに交わらない直線を点 (x, y) での**接線**という．$\dfrac{dy}{dx}$ は点 (x, y) での接線の傾きを表す.

a，b が定数のとき，点 (a, b) での $\dfrac{dy}{dx}$ の値，$f'(a)$ を**変化率**または微分係数という.

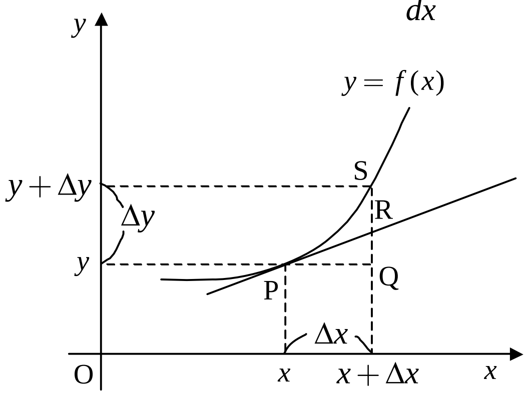


図 2.1　$y = f(x)$ と接線

> Δx （線分 PQ の長さ）: x の増分
> Δy （線分 QS の長さ）: y の増分
> $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$: 平均変化率
> y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$f'(x)$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$:
> $y = f(x)$ の導関数

例 2.1　$y=c$（c は定数）のとき，$\dfrac{dy}{dx}=0$（$y'=(c)'=0$）を導関数の定義式を用いて証明せよ．

解　$\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{c-c}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{0}{\Delta x}=0$

x の関数 $f(x)$ が x の関数 $g(x)$ の関数であるとき，$f(x)$ は，f と g の**合成関数**であるといい，

$$f(g(x))\text{，または}u=g(x)\text{とおけば，}\ f(u) \tag{2.2}$$

と表すことがある．

例 2.2　$y=e^{cx}$　（c は定数）は，x の c 倍である cx を 1 つの変数 u とみなすならば，y は変数 u の関数になる．y を u を用いて表せ．

解　$y=e^{cx}$　で　$u=cx$ とおけば，$y=e^{u}$

$y=f(x)$　の導関数　y'，$\dfrac{dy}{dx}$，$f'(x)$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$　を求めることを，y または $f(x)$ を x で**微分する**という．

微分法の公式 1　　（$f(x)$，$g(x)$ は連続な関数．c は定数）

(1)　$\{cf(x)\}'=cf'(x)$

(2)　$\{f(x)\pm g(x)\}'=f'(x)\pm g'(x)$

(3)　$\{f(x)\cdot g(x)\}'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

(4)　$\left\{\dfrac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

(5)　$\{f(g(x))\}'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

$y=f(u)$，$u=g(x)$ とおけば，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$（合成関数の微分法）

y を x で微分する＝（y を u で微分する）×（u を x で微分する）

例 2.3　$y=f(g(x))$　は，$u=g(x)$　とおけば，$y=f(u)$　となる．公式(5)を証明せよ．

解　$\dfrac{dy}{dx}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(g(x+\Delta x))-f(g(x))}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$f'(g(x))$ は $f(x)$ を $g(x)$ で微分したもの, すなわち y を u で微分したものである. また $g'(x)$ は $g(x)$ を x で微分したもの，すなわち u を x で微分したものである．したがって，別の表現は

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

例 2.4　$y=\log|x|$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$ を，次の（1）と（2）から証明せよ．

（1）$x>0$，$y=\log x$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$ を導関数の定義式を用いて証明せよ．ただし，

$\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=e$ とする．

解　$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log(x+\Delta x)-\log x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x}\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\frac{1}{x}\log e=\frac{1}{x}$$

（2）$x<0$，$y=\log(-x)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$ を合成関数の微分法を用いて証明せよ．

解　$u=-x$ とおけば，$y=\log u$ となるから，合成関数の微分法より，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot(-1)=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

したがって，（1）と（2）から，$y=\log|x|$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$

例 2.5　$y=e^x$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=e^x$ を証明せよ．

解　$y=e^x$ の両辺の対数をとれば，$\log y=x$ を得る．この左辺を微分するとき合成関数の微分法を用いて，この両辺を x で微分すれば，$\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{dy}{dx}=1$ より，$\dfrac{dy}{dx}=y$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=e^x$$

微分法の公式 2　（c は定数，a は 0 ではない実数）

（1）$y=c$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=0$，$y'=0$，$(c)'=0$

（2）$y=x^a$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=ax^{a-1}$，$y'=ax^{a-1}$，$(x^a)'=ax^{a-1}$

（3）$y=e^x$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=e^x$，$y'=e^x$，$(e^x)'=e^x$

（4）$y=\log|x|$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$，$y'=\dfrac{1}{x}$，$(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$

例 2.6　$y=a\left(1-e^{-\frac{1}{b}x}\right)$ について，次の問いに答えよ．ただし，a，b はともに正の定数とする．

(1)　微分法の公式を用いて，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ．すなわち y を x で微分せよ．

解　定数 a を微分すれば $(a)'=0$ である．$u=-\dfrac{x}{b}$ とおいて，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ を用いれば，

$$\frac{dy}{dx}=\left\{a\left(1-e^{-\frac{1}{b}x}\right)\right\}'=(a)'-a\left(e^{-\frac{1}{b}x}\right)'=0-a\left(-\frac{1}{b}x\right)'\cdot\frac{d}{du}e^{u}=-a\left(-\frac{1}{b}\right)e^{u}=\frac{a}{b}e^{-\frac{1}{b}x}$$

ゆえに，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{b}e^{-\frac{1}{b}x}$$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{b}(y-a)$ を導け．

解　$y=a\left(1-e^{-\frac{1}{b}x}\right)$ の右辺の括弧を分配の法則よりはずす．$y=a-ae^{-\frac{1}{b}x}$ の両辺に $-a$ を加えた後，両辺に -1 を掛ければ，$ae^{-\frac{1}{b}x}=-(y-a)$ を得る．$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a}{b}e^{-\frac{1}{b}x}$ であるから，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a}{b}e^{-\frac{1}{b}x}=\frac{1}{b}ae^{-\frac{1}{b}x}=\frac{1}{b}\{-(y-a)\}$$

ゆえに，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{b}(y-a)$$

x 軸上を運動する物体がある．この物体の位置 x が時刻 t の関数 $x=x(t)$ で与えられるとする．

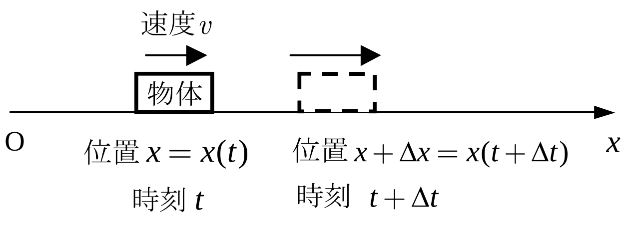


図 2.2　x 軸上を運動する物体の位置

時刻 t での位置 x が，時刻 $t+\Delta t$ には位置 $x+\Delta x$ に変わったとき，

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} \tag{2.3}$$

を時刻 t と $t+\Delta t$ との間の**平均速度**という．

$$\text{平均速度}=\frac{\text{位置の変化}}{\text{要した時間}}=\frac{\text{変化後の位置}-\text{変化前の位置}}{\text{要した時間}}$$

時刻 t での**速度**（瞬間速度）v は，次式で定義される．

$$v=\frac{dx}{dt} \tag{2.4}$$

速度（瞬間速度）は位置を時刻で微分した量

速度は速さ（速度の大きさ）と方向をもつ量である．速度が一定の運動，すなわち速さと方向が変わらない運動を**等速直線運動**という．

物体の速度 v が，時刻 t の関数 $v=v(t)$ で与えられるとする．

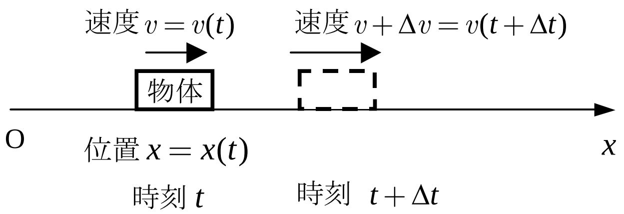


図 2.3　x 軸上を運動する物体の速度

時刻 t での速度 v が，時刻 $t+\Delta t$ には速度 $v+\Delta v$ に変わったとき，

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} \tag{2.5}$$

を時刻 t と $t+\Delta t$ の間の**平均加速度**という．

$$\text{平均加速度}=\frac{\text{速度の変化}}{\text{要した時間}}=\frac{\text{変化後の速度}-\text{変化前の速度}}{\text{要した時間}}$$

時刻 t での**加速度**は，次式で定義される．

$$\frac{dv}{dt},\quad \frac{d^2x}{dt^2}\quad \left(=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right) \tag{2.6}$$

加速度＝速度を時刻で微分した量，または位置を時刻で 2 回微分した量

加速度は大きさと方向をもつ量である．加速度が一定の運動，すなわち加速度の大きさと方向が変わらない運動を**等加速度直線運動**という．

例 2.7　x 軸上を運動する物体の時刻 t での位置 x が，次式で与えられる．速度と加速度をそれぞれ求めよ．(1)と(2)の運動はそれぞれ何という運動か．

(1)　$x=x_0+v_0t$　　　　(2)　$x=x_0+v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$

ただし，x_0 は時刻 $t=0$ での位置，v_0 は初速度，すなわち $t=0$ での速度である．a は 0 でない定数とする．

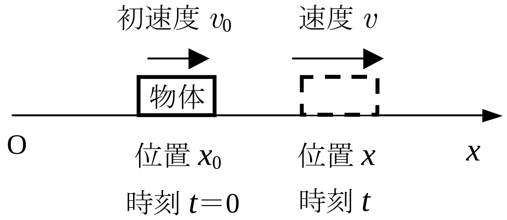


図 2.4　x 軸上を運動する物体の位置と速度

解　(1)　速度 v は，位置 x を時刻 t で微分すれば，

$$v=\frac{dx}{dt}=\left(x_0+v_0t\right)'=\left(x_0\right)'+v_0\left(t\right)'=v_0\cdot 1=v_0$$

$$\therefore\quad v=v_0$$

加速度は，速度 v を時刻 t で微分すれば，

$$\frac{dv}{dt}=\left(v_0\right)'=0$$

$$\therefore\quad \frac{dv}{dt}=0$$

加速度が 0 で，速度 v が v_0 で一定であるから，等速直線運動である．

(2)　速度 v は，位置 x を時刻 t で微分すれば，

$$v=\frac{dx}{dt}=\left(x_0+v_0t+\frac{1}{2}at^2\right)'=\left(x_0\right)'+v_0\left(t\right)'+\frac{1}{2}a\left(t^2\right)'=v_0\cdot 1+\frac{1}{2}a\cdot 2t=v_0+at$$

$$\therefore\quad v=v_0+at$$

加速度は，速度 v を時刻 t で微分すれば，

$$\frac{dv}{dt}=\left(v_0+at\right)'=\left(v_0\right)'+a\left(t\right)'=a\cdot 1=a$$

$$\therefore\quad \frac{dv}{dt}=a$$

加速度が a で一定であるから，等加速度直線運動である．

3．微分方程式と積分法

変数 x, x の関数 y, その導関数 $\dfrac{dy}{dx}$, 第 2 次導関数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ などの間の関係式を**微分方程式**という．与えられた微分方程式を満たす関数 y をこの微分方程式の**解**という．微分方程式の解を求めることを，**微分方程式を解く**という．

y の x に関する微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{3.1}$$

を**変数分離形**の微分方程式という．$\dfrac{dy}{dx}$ の右辺が x の関数と y の関数との積である．

次に，微分方程式を解くために，積分法を説明しよう．

$F(x)$ を x で微分したものが $f(x)$ になるとき，次式で表す．

$$F'(x)=f(x) \tag{3.2}$$

この逆は，$f(x)$ を x で**積分**したものが $F(x)$ になるという．次式で表す．

$$\int f(x)dx=F(x)+C \qquad （C \text{ は積分定数である）} \tag{3.3}$$

$f(x)$ は積分される関数であるから**被積分関数**といい，$F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．

$\int f(x)dx$ は $f(x)$ の x についての**不定積分**という．$\int$ はインテグラルと読む.

微分法の公式 2 の(2)より，$\left(\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}+C\right)'=\left(\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}\right)'+\left(C\right)'=\dfrac{1}{a+1}\cdot(a+1)x^{a+1-1}=x^a$,

(4) より，$\left(\log|x|+C\right)'=\left(\log|x|\right)'+\left(C\right)'=\dfrac{1}{x}+0=\dfrac{1}{x}$ を得るから，次の公式がなりたつ.

積分法の公式　（C は積分定数，a は 0 ではない実数）

(1) $\displaystyle\int x^a dx=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C$　　(2) $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+C$

区間 $[a, b]$（$a \le x \le b$）で連続な関数 $y = f(x)$ を考える.

区間 $[a, b]$ を n 個の小区間に分割し，i 番目の区間の幅を Δx_i と書く．この分割は必ずしも等間隔でなくてもよいので, 各区間の幅は必ずしも等しくない．i 番目の区間内に任意の点 x_i をとる．点 x_i は区間$[a, b]$ 内にあれば，左端でも，中点でも，右端でも，どこの点でもよい．次の和を考える.

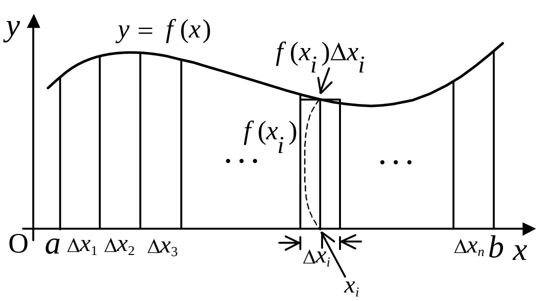


図 3.1　$y = f(x)$ と幅Δx_iの長方形

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = f(x_1)\Delta x_1+f(x_2)\Delta x_2+\cdots+f(x_n)\Delta x_n \tag{3.4}$$

区間 $[a, b]$ で $f(x) > 0$ のとき，和 S_n は長方形の面積（縦×横）の和である．小区間の個数を限りなく大きくしたとき，和 S_n の極限が存在する．この極限値は次式で表される.

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \tag{3.5}$$

$\int_a^b f(x)dx$ は，関数 $f(x)$の a から b までの x についての**定積分**という．a を定積分の**下端**，b を**上端**という.

閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$とすれば，次式がなりたつ.

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a) \tag{3.6}$$

これを**微分積分学の基本定理**という.

定積分$\int_a^b f(x)dx$ は，$F(x)$ の**上端** b での値 $F(b)$ から**下端** a での値 $F(a)$ を引いた値に等しい.

例 3.1 $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x+c}dx$ を計算せよ．ただし，a，b，c は定数とする．

解法 1：$u=x+c$ とおけば，$du=dx$ となる．$x=a$ のとき，$u=a+c$，$x=b$ のとき，$u=b+c$

$$\int_a^b \frac{1}{x+c}dx=\int_{a+c}^{b+c}\frac{1}{u}du=\left[\log|u|\right]_{a+c}^{b+c}=\log|b+c|-\log|a+c|=\log\left|\frac{b+c}{a+c}\right|$$

解法 2: $x+c>0$ のとき, $u=x+c$ とおけば, $\dfrac{d}{dx}\left(\log(x+c)\right)=\dfrac{d}{du}\left(\log u\right)\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\cdot 1=\dfrac{1}{x+c}$,

$x+c<0$ のとき, $u=-x-c$ とおけば, $\dfrac{d}{dx}\left(\log(-x-c)\right)=\dfrac{d}{du}\left(\log u\right)\dfrac{du}{dx}=\dfrac{1}{u}\cdot(-1)=\dfrac{1}{x+c}$

$f(x)=\dfrac{1}{x+c}$ とおけば，$F(x)=\log|x+c|$ であるから，微分積分学の基本定理より，

$$\int_a^b \frac{1}{x+c}dx=\left[\log|x+c|\right]_a^b=\log|b+c|-\log|a+c|=\log\left|\frac{b+c}{a+c}\right|$$

以下に，微分方程式を解くときに用いる微分を説明する．図 3.2 で，(x, y) での接線の傾き $\dfrac{dy}{dx}$ と Δx との積を dy と表す．

$$dy=\frac{dy}{dx}\Delta x \tag{3.7}$$

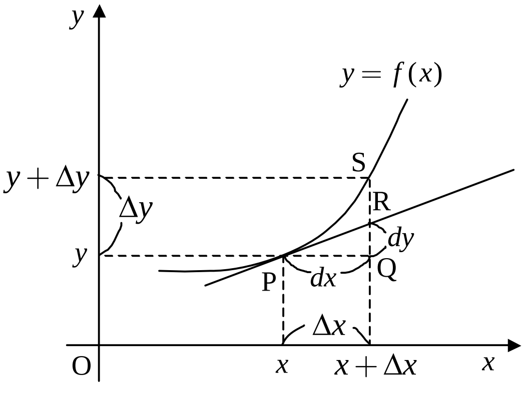
接線の式が $y=ax+b$ のとき, 接線の傾き $\dfrac{dy}{dx}=a$ を式 (3.7) の右辺に代入すれば，$dy=a\Delta x$ を得る．これを $\dfrac{dy}{dx}=a$ に代入すれば，$\Delta x=dx$ を得る．したがって，次式がなりたつ．

$$dy=\frac{dy}{dx}dx \tag{3.8}$$

式（3.8）の，左辺の dy を y の**微分**といい，右辺の dx を x の**微分**という．式（3.8）の右辺の

$$\frac{dy}{dx} \tag{3.9}$$

を**微分商**という．



Δx （線分 PQ の長さ）: x の増分,
Δy （線分 QS の長さ）: y の増分
dx : x の微分
dy : y の微分
$\dfrac{dy}{dx}$ （点 P での接線 PR の傾き）: 微分商

図 3.2　$y=f(x)$ と（x, y）での接線

次の変数分離形の微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \tag{3.10}$$

の解き方を説明しよう．上式の両辺を $g(y)$ で割れば，

$$\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}=f(x) \tag{3.11}$$

上式の両辺を x で積分すれば，

$$\int\frac{1}{g(y)}\frac{dy}{dx}dx=\int f(x)dx \tag{3.12}$$

式（3.12）は，式（3.8）を用いれば，変数 x が右辺に，変数 y が左辺に分離できて，次式になる．

$$\int\frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx \tag{3.13}$$

上式は，変数分離された形であり，左辺が変数 y で，右辺が変数 x で，それぞれ積分できる．

$x=a$ のとき $y=\alpha$（アルファ）で，$x=b$ のとき $y=\beta$（ベータ）であれば，式（3.13）は，次式の定積分で表される．ただし，$a\leq x\leq b$，$\alpha\leq y\leq\beta$ とする．

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{g(y)}dy=\int_{a}^{b}f(x)dx \tag{3.14}$$

例 3.2 変数分離形の y の x に関する微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{b}(y-a)$ を解け．漸近線を求めよ．

ただし，$x=0$ のとき $y=0$，$0\leq y<a$ とする．

解 与えられた微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{b}(y-a) \tag{3.15}$$

の両辺を $y-a$ で割れば，

$$\frac{1}{y-a}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{b} \tag{3.16}$$

上式の両辺を x で積分すれば，

$$\int\frac{1}{y-a}\frac{dy}{dx}dx=-\frac{1}{b}\int dx \tag{3.17}$$

上式は，左辺で $\dfrac{dy}{dx}dx=dy$ を用いれば，次式になる．

$$\int\frac{1}{y-a}dy=-\frac{1}{b}\int dx \tag{3.18}$$

$$\therefore\quad \log|y-a|=-\frac{1}{b}x+C \tag{3.19}$$

ここで，C は積分定数である．$0\leq y<a$ であるから，次式を得る．

$$\log(-y+a)=-\frac{1}{b}x+C \tag{3.20}$$

$$\therefore \quad -y+a=e^{C}e^{-\frac{1}{b}x} \tag{3.21}$$

上式に $x=0$，$y=0$ を代入すれば，$e^{C}=a$ を得る．したがって，

$$y=a\left(1-e^{-\frac{1}{b}x}\right) \tag{3.22}$$

$x\to\infty$ では，$e^{-\frac{1}{b}x}\to 0$ であるから，$y\to a$ である．したがって，$y=a$ が漸近線である．

4. 運動方程式と力学の現象

静止している物体を動かすとか，動いている物体を静止させるとか，動いている物体をどんどん速くするとか遅くするとか方向を変えるとかの原因を**力**という．

実験によれば，物体に力を加えると，加えた力の方向に，物体に加速度が生じる．その加速度の大きさは，物体に働く力の大きさに比例し，物体の質量に反比例する．これをニュートンの**運動の第 2 法則**という．

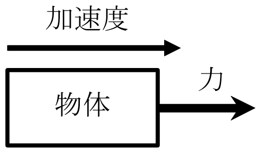


図 4.1　物体に力を加えると加速度が生じる

簡単のため，直線上を運動する物体を考える．直線運動する質量 m の物体の加速度を a，物体に働く力を F とすれば，運動の第 2 法則は，次式で表される．

$$a=k\frac{F}{m} \tag{4.1}$$

ここで，k は正の比例定数である．質量 1kg の物体に大きさ 1m/s^2 の加速度を生じさせる力の大きさを 1N とすれば，k=1 となる．質量の単位に kg，加速度の大きさの単位に m/s^2，力の大きさの単位に N を用いれば，運動の第 2 法則は，次式で表される．

運動の第 2 法則

$$ma=F \tag{4.2}$$

質量×加速度＝力

力 1 N の定義：1 N（ニュートン）＝1 kg（キログラム）・m / s^2（メートル毎秒毎秒）

物体に 2 つ以上の力が働く場合，右辺の力は，2 つ以上の力の大きさと方向を考慮に入れて和をとった力，すなわち**合力**である．合力は，1 つ 1 つの力をそれぞれベクトルで表し，それらの

ベクトル和を計算すれば求めることができる．

物体に働く力が分かっている場合，時々刻々での物体の運動を知る方法を述べよう．運動の第2法則は，未知量の加速度が左辺に，既知量の力が右辺の式になる．これを**運動方程式**という．

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{運動方程式}\\ ma = F\\ \text{質量}\times\text{加速度}=\text{力}\end{array}} \tag{4.3}$$

式（4.3）を書くことを，**運動方程式を立てる**という．運動方程式から加速度を求めて，加速度を積分すれば速度が求まる．この速度を積分すれば位置が求まる．このようにして，時刻 t での物体の速度と位置が分かれば，物体の運動が分かったことになる．

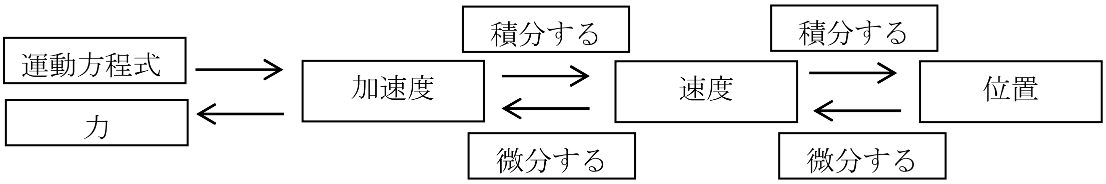


図 4.2　加速度，速度，位置と微分法，積分法の関係

例 4.1　質量 m の雨粒が，初速度 0（時刻 0 での速度が 0）で，速度 v に比例した抵抗力 $-cv$（c は正の比例定数）と重力を受けて，鉛直に落下した．時刻 t での雨粒の速度 v を求めよ．また，時定数 τ を m, c で表し，時刻 t に対する速度 v のグラフを描け．重力加速度の大きさを g とする．時刻 0 での雨粒の位置を原点 O として，鉛直下向きが正方向になるように x 軸をとって，運動方程式を立てて考えよ．

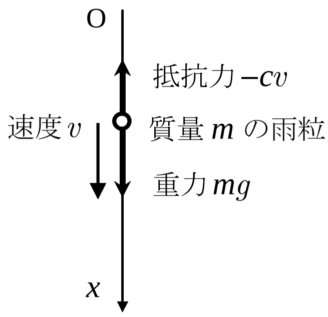


図 4.3　雨滴に働く重力と抵抗力

解　時刻 t での雨粒の速度は v であるから，その加速度は $\dfrac{dv}{dt}$ と書ける．物体に働く合力は，鉛直下向きに働く重力 mg と鉛直上向きに働く抵抗力 $-cv$ の和 $mg-cv$ である．質量×加速度＝合力より，雨粒の運動方程式は，次式の v の t に関する微分方程式で与えられる．

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv \tag{4.4}$$

上式の両辺を m で割った後，右辺を $-\dfrac{c}{m}$ でくくれば

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m}\left(v - \frac{mg}{c}\right) \tag{4.5}$$

上式の両辺を $v-\dfrac{mg}{c}$ で割って，両辺を t で積分すれば，

$$\int \frac{1}{v-\frac{mg}{c}}\frac{dv}{dt}dt = -\frac{c}{m}\int dt \tag{4.6}$$

上式は，左辺で $\dfrac{dv}{dt}dt = dv$ を用いれば，次式になる．

$$\int \frac{1}{v-\frac{mg}{c}}dv = -\frac{c}{m}\int dt \tag{4.7}$$

$$\therefore \quad \log\left|v-\frac{mg}{c}\right| = -\frac{c}{m}t + C \tag{4.8}$$

ここで，C は積分定数である． $0 \le v < \dfrac{mg}{c}$ であるから，次式を得る．

$$\log\left(-v+\frac{mg}{c}\right) = -\frac{c}{m}t + C \tag{4.9}$$

$$\therefore \quad -v+\frac{mg}{c} = e^C e^{-\frac{c}{m}t} \tag{4.10}$$

上式に $t=0$， $v=0$ を代入すれば， $e^C = \dfrac{mg}{c}$ を得る．したがって，

$$v = \frac{mg}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right) \tag{4.11}$$

時定数は $\tau = \dfrac{m}{c}$ である．グラフは，図 4.4 となる．ただし， $a = \dfrac{mg}{c}$ とした．

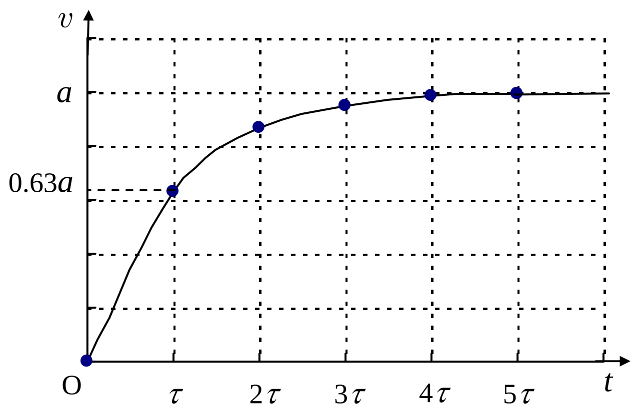


図 4.4　時刻と雨滴の落下速度との関係

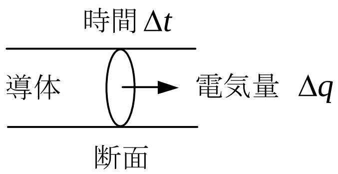
上図において，$t \to \infty$ では， $v \to \dfrac{mg}{c}$ である． $\dfrac{mg}{c}$ を**終端速度**という． $t=\tau$ のとき，速度 v の値は終端速度 $\dfrac{mg}{c}$ の約 63%である．実際に，雨粒が地面に達するまでには，終端速度 $\dfrac{mg}{c}$ になっている．

5. キルヒホッフの第 2 法則と電気の現象

導体（電気を通す物体）の断面を，時刻 t から時間 Δt の間に，Δq の電気量が通過したとき，時刻 t に流れた電流 I は，$\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$ とする．すなわち，

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}} \tag{5.1}$$

電気量 1 C の定義：1 C（クーロン）＝1 A（アンペア）・s（秒）



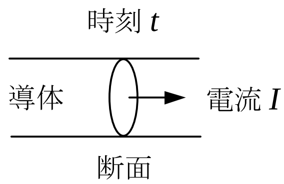


図 5.1（a） 導体の断面を通過する電気量　　図 5.1（b）導体の断面を時刻 t に流れる電流

点 P から無限遠まで電気量が移動する間に，電気力がする単位電気量あたりの仕事を，点 P での**電位**という．2 点間の電位の差を**電位差**または**電圧**という．

電圧 1 V の定義：1 V（ボルト）＝1 J（ジュール） / C（クーロン）

金属線の両端に電圧を加えると，金属線を流れる電流の強さは電圧に比例し，金属線の**抵抗**に反比例する．これを**オームの法則**という．オームの法則は，電圧を V，抵抗の値を R，電流の強さを I とすれば，次式で表される．

オームの法則

$$V = RI \tag{5.2}$$

電圧＝抵抗の値×電流の強さ

抵抗 1 Ω の定義：1 Ω（オーム）＝1 V（ボルト） / A（アンペア）

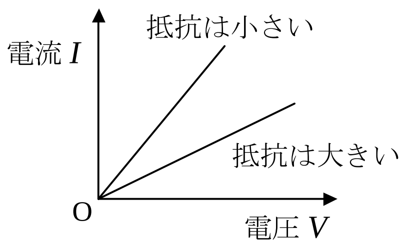
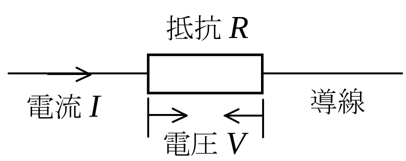


図 5.2 電流と電圧の比例関係



抵抗は長方形に図示する．導線の抵抗は 0 とする．

図 5.3 抵抗の記号

電流が抵抗から流れ出る側の電位は，流れ込む側の電位より，抵抗の値×電流の強さ だけ低い．これを**電圧降下**という．すなわち抵抗の両端での電圧降下は $V = RI$ である．

2 つの金属板を相対して，その間に電位差（電圧）があれば，両極板に電気が蓄えられる．こ

の装置を**キャパシター**（コンデンサー）という．＋極（プラス極，正極）に＋の電気量が蓄えられ，−極（マイナス極，負極）には，＋極に蓄えられる電気量と等量の−の電気量が蓄えられる．

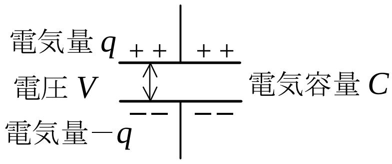


図 5.4　キャパシターの記号

キャパシターは同じ長さの 2 本の平行線で図示する．

実験によれば，両極板に蓄えられる電気量は両極板間の電位差に比例し，比例定数を**電気容量**という．電気量を q，電気容量を C，電位差を V とすれば，次式がなりたつ．

$$q = CV \tag{5.3}$$

電気量＝電気容量×電位差

電気容量 1 F（ファラド） の定義：1 F（ファラド） ＝ 1 C（クーロン） / V（ボルト）

図 5.5 のように，電池，抵抗，キャパシター，スイッチを回路に接続し，スイッチを閉じると，電流は電位の高い方から低い方へ流れる．しかし，電池の内部では電流は−極から＋極へ流れる．電池の＋極の電位は−極の電位より**起電力**だけ高い．

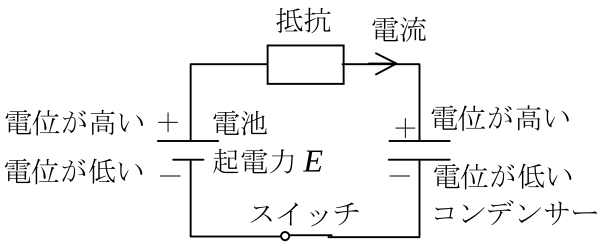


図 5.5　電気回路

電池は異なる長さの 2 本の平行線で図示する．長い線は＋極，短い線は−極を表す．

電流が抵抗から流れ出る側の電位は，流れ込む側の電位より，抵抗値×電流の強さ だけ低い．また，キャパシターの−極の電位は＋極の電位より $\dfrac{\text{電気量}}{\text{電気容量}}$ だけ低い．抵抗とキャパシターで電位が下がった分に等しいだけ，電池の＋極の電位は−極の電位より高い．数個の電池，抵抗，キャパシターなどを接続した電気の閉回路において，一般に，

$$\text{電圧降下の和} = \text{起電力の和} \tag{5.4}$$

がなりたつ．これを**キルヒホッフの第 2 法則**という．これは，閉回路でのエネルギー保存を示す．

例 5.1　図 5.6 の電気回路で，電池の起電力を E，抵抗の値を R，キャパシターの電気容量を C とする．時刻 0 にスイッチを閉じた後，時刻 t でのキャパシターに蓄えられる（キャパシターを充電する場合の）電気量 q を求めよ．また，時定数 τ を R，C で表し，時刻 t での電気量 q のグラフを描け．最初，キャパシターに蓄えられていた電気量は 0 とする．キルヒホッフの第 2 法則にしたがって式を立てて解け．

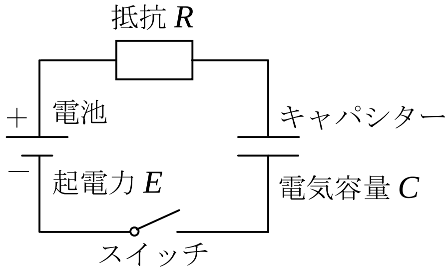


図 5.6　電気回路

解　時刻 t に抵抗を流れる電流は $I=\dfrac{dq}{dt}$ であるから，抵抗による電圧降下は RI，すなわち $R\dfrac{dq}{dt}$ である．キャパシターによる電圧降下は $\dfrac{q}{C}$ である．

キルヒホッフの第 2 法則

$$\text{電圧降下の和}=\text{起電力の和} \tag{5.4}$$

は，次式の q の t に関する微分方程式で表される．

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E \tag{5.5}$$

上式の両辺に $-\dfrac{q}{C}$ を加えて，その両辺を R で割った後，右辺を $-\dfrac{1}{RC}$ でくくれば

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{1}{RC}(q-CE) \tag{5.6}$$

上式の両辺を $q-CE$ で割って，両辺を t で積分すれば,

$$\int\frac{1}{q-CE}\frac{dq}{dt}dt=-\frac{1}{RC}\int dt \tag{5.7}$$

上式は，左辺で $\dfrac{dq}{dt}dt=dq$ を用いれば，次式になる．

$$\int\frac{1}{q-CE}dq=-\frac{1}{RC}\int dt \tag{5.8}$$

$$\therefore\ \log|q-CE|=-\frac{1}{RC}t+C_1 \tag{4.8}$$

ここで，C_1 は積分定数である．$0\leq q<CE$ であるから，次式を得る．

$$\log(-q+CE)=-\frac{1}{RC}t+C_1 \tag{5.9}$$

$$\therefore\ -q+CE=e^{C_1}e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{5.10}$$

上式に $t=0$，$q=0$ を代入すれば，$e^{C_1}=CE$ を得る．したがって，

$$q=CE\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \tag{5.11}$$

時定数は $\tau = RC$ である．グラフは，図 5.7 となる．ただし，$a = CE$ とした．

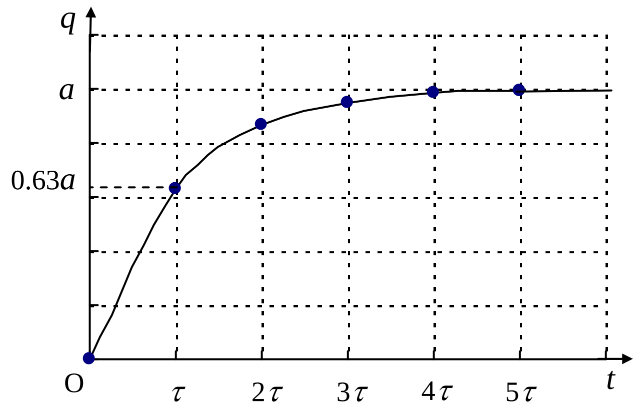


図 5.7　キャパシターを充電する場合の電気量と時間の関係

上図において，$t \to \infty$ では，$q \to CE$ である．$t = \tau$ のとき，キャパシターに蓄えられる電気量は CE の約 63%である．スイッチを閉じて，十分な時間が経てば，キャパシターに蓄えられる電気量は CE となり，回路に流れる電流は $I = 0$ となる．スイッチを閉じた瞬間，キャパシターに蓄えられている電気量は 0 であり，キャパシターの極板間の電圧は 0 であるから，回路に流れる電流は $I = \dfrac{E}{R}$ となる．

例 5.2　例 5.1 で，キャパシターの電気容量 C が $10\,\mu\mathrm{F}$ のとき，時定数 τ を $100\,\mu\mathrm{s}$ にするには，抵抗の値 R は何 Ω にしたらよいか．スイッチを閉じて，$500\,\mu\mathrm{s}$ 後の，$e^{-\frac{1}{RC}t}$ の値を四捨五入により有効数字 1 桁まで求めよ．1 s（セカント）$=1$ Ω（オーム）・F（ファラド），μ（マイクロ）$=10^{-6}$ である．

解　$\tau = RC$ より，

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{100\,\mu\mathrm{s}}{10\,\mu\mathrm{F}} = 10\,\Omega$$

$$e^{-\frac{1}{RC}t} = e^{-\frac{500\mu\mathrm{s}}{100\mu\mathrm{s}}} = e^{-5} = 2.72^{-5} = \frac{1}{149} \fallingdotseq 0.007$$

6. まとめ

例 4.1 では，速度に比例した抵抗力と重力を受けた雨粒の落下運動について，その運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = mg - cv \tag{4.4}$$

は，速度の時刻に関する次の微分方程式で表された．

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m}\left(v - \frac{mg}{c}\right) \tag{4.5}$$

この微分方程式の解は，次式になった．

$$v=\frac{mg}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right) \tag{4.11}$$

一方，例 5.1 では，キャパシターを充電する場合，キルヒホッフの第 2 法則を表す式

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E \tag{5.5}$$

は，電気量の時刻に関する次の微分方程式で表された．

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{1}{RC}(q-CE) \tag{5.6}$$

この微分方程式の解は，次式になった．

$$q=CE\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \tag{5.11}$$

力学と電気の現象を表す微分方程式（4.5）と（5.6）を，例 3.2 の変数分離形の微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{b}(y-a) \tag{3.15}$$

と比較してみよう．式（4.5）は，速度 v は変数 y に，時刻 t は変数 x に，定数 $\frac{mg}{c}$ は定数 a に，定数 $\frac{m}{c}$ は定数 b に置きかえれば，式（3.15）になる．式（5.6）は，電気量 q を変数 y に，時刻 t を変数 x に，定数 CE を定数 a に，定数 RC を定数 b に置きかえれば，式（3.15）になる．3 つの微分方程式の関係は，下図のようになる．

力学の現象

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{c}{m}\left(v-\frac{mg}{c}\right)$$

解： $v=\frac{mg}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right)$

電気の現象

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{1}{RC}(q-CE)$$

解： $q=CE\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

変数変換：$v\rightarrow y$，$t\rightarrow x$

$\frac{mg}{c}\rightarrow a$，$\frac{m}{c}\rightarrow b$

微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{b}(y-a)$$

解： $y=a\left(1-e^{-\frac{1}{b}x}\right)$

変数変換：$q\rightarrow y$，$t\rightarrow x$

$CE\rightarrow a$，$RC\rightarrow b$

図 5.8　力学と電気の現象を表す式と変数分離形の微分方程式の間の関係

以上から，ここで挙げた力学と電気の一見異なる現象が，数学的には同じ形式の微分方程式で表されることが分かった．その解である速度と電気量は，時刻に関する指数関数で表されることも分かった．

問　上述以外の自然現象や経済現象においても，変数分離形の微分方程式で表されて，その解が指数関数で表される現象がある．そのような例を見つけて，比較・考察せよ．

参考文献

[1]　数理工統合教育検討委員会編，数理工統合Ⅲ，金沢工業大学，2005 年.

[2]　原　康夫，第 3 版　基礎物理学，学術図書出版社，2006 年.