1. 指数関数とそのグラフ

x が$\cdots, -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ などいろいろな値をとる数 x を**変数**という．変数に対して，変わらない数を**定数**という．変数 x の値を 1 つ決めると，$y = f(x)$ によって，変数 y の値が 1 つ決まるとき，y または $f(x)$ は x の**関数**であるという．

> a を 1 ではない正の定数とし，x を変数とするとき，
> $$a^x$$
> を，a を底とする x の**指数関数**という．

(1.1)

a^x の a の部分を**底**，x の部分を**指数**という．e を底とする x の指数関数は，e^x である．ただし，e は**ネイピアの数**といい，無理数であり，その値は $e = 2.71828\cdots$ である．

例 1.1　x を変数とする指数関数の例を 5 つ挙げよ．

解　例えば，2^x，$2^{-x}\left(=\dfrac{1}{2^x}\right)$，$e^x$，$e^{-x}$，$ae^{bx}$　（a，b は 0 ではない定数）など．

例 1.2　$y = -e^{-x}$（$x \geq 0$）について，数表を作りグラフの概略図を描け．$e = 2.718$ として，$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ での y の値を四捨五入して小数第 3 位まで求めて，数表を作れ．

解　$x = 0$ のとき，$y = -2.718^0 = -1$，$x = 1$ のとき，$y = -2.72^{-1} = -\dfrac{1}{2.72} \fallingdotseq -0.368$

$x = 2$ のとき，$y = -2.72^{-2} \fallingdotseq -\dfrac{1}{7.40} \fallingdotseq -0.135$，$x = 3$ のとき，$y = -2.72^{-3} \fallingdotseq -\dfrac{1}{20.1} \fallingdotseq -0.050$，

$x = 4$ のとき，$y = -2.72^{-4} \fallingdotseq -\dfrac{1}{54.7} \fallingdotseq -0.018$，$x = 5$ のとき，$y = -2.72^{-5} \fallingdotseq -\dfrac{1}{149} \fallingdotseq -0.007$

数表は，表 1.1 のとおりである．

表 1.1　$y = -e^{-x}$（$x \geq 0$）の数表

x	0	1	2	3	4	5	$\cdots$
y	－1	－0.368	－0.135	－0.050	－0.018	－0.007	$\cdots$

xy 座標系の平面にプロットした点を滑らかに結べば，図 1.1 のグラフが得られる．

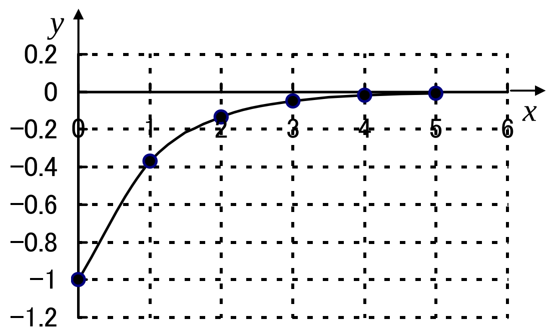

図 1.1　$y = -e^{-x}$（$x \geq 0$）のグラフ

x の値が限りなく大きくなる（$x \to \infty$）とき，y の値が限りなく定数 c に近づく（$y \to c$）場合，直線 $y = c$ を**漸近線**（ぜんきんせん）という．例 1.2 では，$x \to \infty$ のとき，$-e^{-x} \to 0$ であるから，$y \to 0$ となる．したがって，$y = -e^{-x}$ の漸近線は x 軸である．

例 1.3　$y = a\left(1 - e^{-\frac{1}{b}x}\right)$（$x \geq 0$）のグラフの概略図を描け．ただし，$a$，$b$ はともに正の定数とする．　　漸近線は何か．$x = b$ のとき，y の値は a の約何%であるか．

解　$y = -ae^{-\frac{1}{b}x}$ のグラフを，y 軸方向に a だけ平行移動すれば，図 1.2 のグラフが得られる．

$x \to \infty$ では，$e^{-\frac{1}{b}x} \to 0$ であるから，$y \to a$ である．したがって，漸近線は $y = a$ である．

$x = b$ のとき，

$$y = a\left(1 - e^{-\frac{b}{b}}\right) = a\left(1 - 2.72^{-1}\right)$$

$$\fallingdotseq a(1 - 0.368) \fallingdotseq 0.63a$$

したがって，$x = b$ のとき，y の値は a の約 63%である．

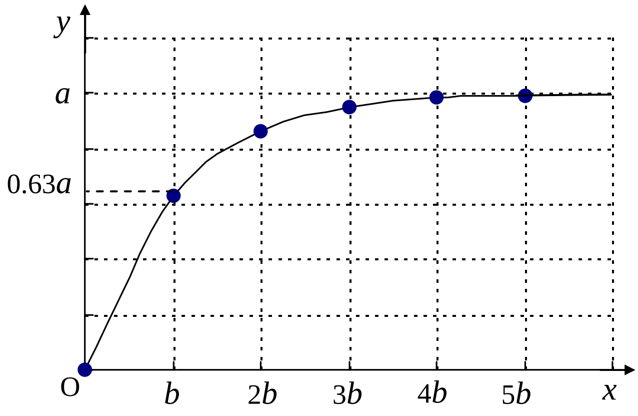

図 1.2　$y = a\left(1 - e^{-\frac{1}{b}x}\right)$（$x \geq 0$）のグラフ

時刻 t（$t \geq 0$）の関数

$$y = a\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) \quad （a，\tau \text{（タウ）はともに正の定数とする）} \tag{1.2}$$

において，正の定数 τ を**時定数**（じていすう）という．この指数関数のグラフは図 1.3 になる．

$t = \tau$ のとき，$e^{-\frac{1}{\tau}\tau} = e^{-1} = 0.37$ となるから，y の値は a の約 63%である．

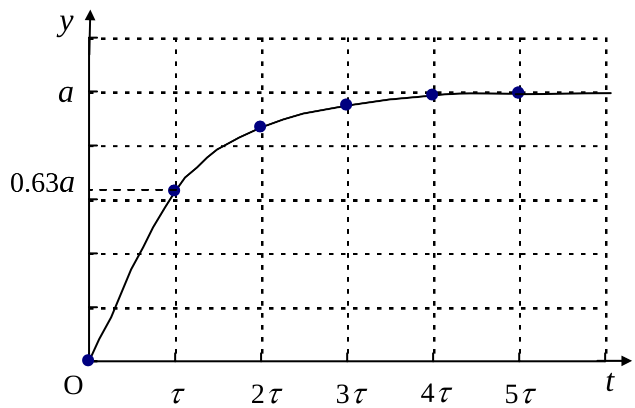

図 1.3　$y = a\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right)$（$t \geq 0$）のグラフ

指数関数 $y=a^x$ において，与えられた正の数 M に対して，

$$a^p=M \tag{1.3}$$

となる実数 p がただ 1 つ決まる．この p を

$$p=\log_a M \tag{1.4}$$

と表し，$\log_a M$ を，a を**底**とする M の**対数**という．M を対数 $\log_a M$ の**真数**(しんすう)という．e を底とする M の対数は，**自然対数**といい，$\log_e M$ である．以後，自然対数を，$\log M$ と表す．電卓では，自然対数は $\ln M$ と表し，10 を底とする**常用対数**は $\log M$ と表す．

> a を 1 ではない正の定数とし，x を変数とするとき，
>
> $$\log_a x \tag{1.5}$$
>
> を，a を底とする x の**対数関数**という．ただし，$x>0$ である．

$\log_a x$ の a の部分を**底**(てい)，x の部分を**真数**(しんすう)という．e を底とする x の対数関数は，$\log_e x$ である．以後，e を省いて，$\log x$ と表す．