4. 運動方程式と力学の現象

静止している物体を動かすとか，動いている物体を静止させるとか，動いている物体をどんどん速くするとか遅くするとか方向を変えるとかの原因を**力**という．

実験によれば，物体に力を加えると，加えた力の方向に，物体に加速度が生じる．その加速度の大きさは，物体に働く力の大きさに比例し，物体の質量に反比例する．これをニュートンの**運動の第 2 法則**という．

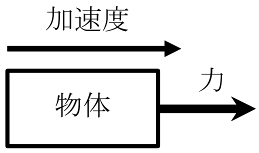

図 4.1　物体に力を加えると加速度が生じる

簡単のため，直線上を運動する物体を考える．直線運動する質量 m の物体の加速度を a，物体に働く力を F とすれば，運動の第 2 法則は，次式で表される．

$$a = k\frac{F}{m} \tag{4.1}$$

ここで，k は正の比例定数である．質量 1kg の物体に大きさ 1m/s^2 の加速度を生じさせる力の大きさを 1N とすれば，k=1 となる．質量の単位に kg，加速度の大きさの単位に m/s^2，力の大きさの単位に N を用いれば，運動の第 2 法則は，次式で表される．

運動の第 2 法則

$$ma = F \tag{4.2}$$

質量×加速度＝力

力 1N の定義：1 N（ニュートン）＝1 kg（キログラム）・m（メートル毎秒毎秒）/ s^2

物体に 2 つ以上の力が働く場合，右辺の力は，2 つ以上の力の大きさと方向を考慮に入れて和をとった力，すなわち**合力**である．合力は，1 つ 1 つの力をそれぞれベクトルで表し，それらのベクトル和を計算すれば求めることができる．

物体に働く力が分かっている場合，時々刻々での物体の運動を知る方法を述べよう．運動の第 2 法則は，未知量の加速度が左辺に，既知量の力が右辺の式になる．これを**運動方程式**という．

運動方程式

$$ma = F \tag{4.3}$$

質量×加速度＝力

式（4.3）を書くことを，**運動方程式を立てる**という．運動方程式から加速度を求めて，加速度を積分すれば速度が求まる．この速度を積分すれば位置が求まる．このようにして，時刻 t での物

体の速度と位置が分かれば，物体の運動が分かったことになる．

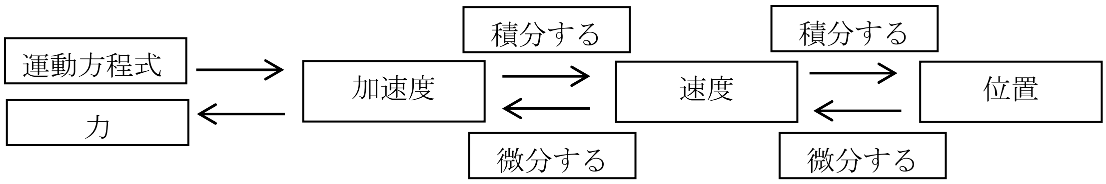

図 4.2　加速度，速度，位置と微分法，積分法の関係

例 4.1　質量 m の雨粒が，初速度 0（時刻 0 での速度が 0）で，速度 v に比例した抵抗力 $-cv$（c は正の比例定数）と重力を受けて，鉛直に落下した．時刻 t での雨粒の速度 v を求めよ．また，時定数 τ を m，c で表し，時刻 t に対する速度 v のグラフを描け．重力加速度の大きさを g とする．時刻 0 での雨粒の位置を原点 O として，鉛直下向きが正方向になるように x 軸をとって，運動方程式を立てて考えよ．

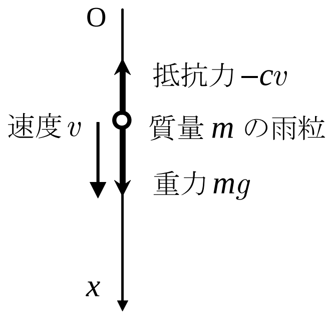

図 4.3　雨滴に働く重力と抵抗力

解　時刻 t での雨粒の速度は v であるから，その加速度は $\dfrac{dv}{dt}$ と書ける．物体に働く合力は，鉛直下向きに働く重力 mg と鉛直上向きに働く抵抗力 $-cv$ の和 $mg-cv$ である．質量×加速度＝合力より，雨粒の運動方程式は，次式の v の t に関する微分方程式で与えられる．

$$m\frac{dv}{dt}=mg-cv \tag{4.4}$$

上式の両辺を m で割った後，右辺を $-\dfrac{c}{m}$ でくくれば

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{c}{m}\left(v-\frac{mg}{c}\right) \tag{4.5}$$

上式の両辺を $v-\dfrac{mg}{c}$ で割って，両辺を t で積分すれば，

$$\int\frac{1}{v-\dfrac{mg}{c}}\frac{dv}{dt}dt=-\frac{c}{m}\int dt \tag{4.6}$$

上式は，左辺で $\dfrac{dv}{dt}dt=dv$ を用いれば，次式になる．

$$\int\frac{1}{v-\dfrac{mg}{c}}dv=-\frac{c}{m}\int dt \tag{4.7}$$

$$\therefore\ \log\left|v-\frac{mg}{c}\right|=-\frac{c}{m}t+C \tag{4.8}$$

ここで，C は積分定数である．$0 \le v < \dfrac{mg}{c}$ であるから，次式を得る．

$$\log\left(-v+\frac{mg}{c}\right)=-\frac{c}{m}t+C \tag{4.9}$$

$$\therefore \quad -v+\frac{mg}{c}=e^{C}e^{-\frac{c}{m}t} \tag{4.10}$$

上式に $t=0$，$v=0$ を代入すれば，$e^{C}=\dfrac{mg}{c}$ を得る．したがって，

$$v=\frac{mg}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right) \tag{4.11}$$

時定数は $\tau=\dfrac{m}{c}$ である．グラフは，図 4.4 となる．ただし，$a=\dfrac{mg}{c}$ とした．

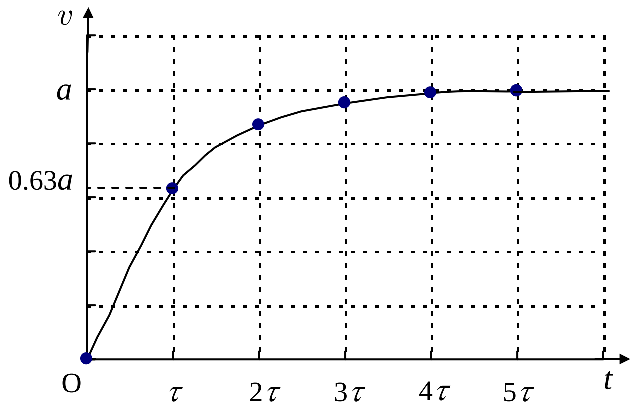

図 4.4　時刻と雨滴の落下速度との関係

上図において，$t \to \infty$ では，$v \to \dfrac{mg}{c}$ である．$\dfrac{mg}{c}$ を**終端速度**という．$t=\tau$ のとき，速度 v の値は終端速度 $\dfrac{mg}{c}$ の約 63%である．実際に，雨粒が地面に達するまでには，終端速度 $\dfrac{mg}{c}$ になっている．