5. キルヒホッフの第 2 法則と電気の現象

導体（電気を通す物体）の断面を，時刻 t から時間 Δt の間に，Δq の電気量が通過したとき，時刻 t に流れた電流 I は，$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}$ とする．すなわち，

$$\boxed{I = \frac{dq}{dt}} \tag{5.1}$$

電気量 1 C の定義：1 C（クーロン） ＝1 A（アンペア） ・s（秒）

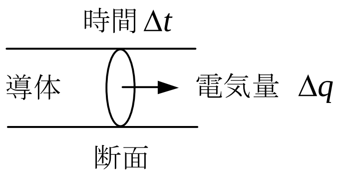


図 5.1（a） 導体の断面を通過する電気量

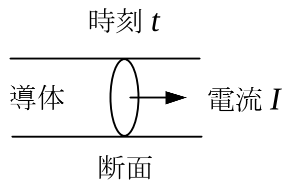


図 5.1（b）導体の断面を時刻 t に流れる電流

点 P から無限遠まで電気量が移動する間に，電気力がする単位電気量あたりの仕事を，点 P での**電位**という．2 点間の電位の差を**電位差**または**電圧**という．

電圧 1 V の定義：1 V（ボルト） ＝1 J（ジュール） / C（クーロン）

金属線の両端に電圧を加えると，金属線を流れる電流の強さは電圧に比例し，金属線の**抵抗**に反比例する．これを**オームの法則**という．オームの法則は，電圧を V，抵抗の値を R，電流の強さを I とすれば，次式で表される．

オームの法則

$$V = RI \tag{5.2}$$

電圧＝抵抗の値×電流の強さ

抵抗 1 Ω の定義：1 Ω（オーム） ＝1 V（ボルト） / A（アンペア）

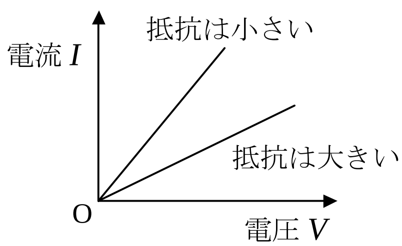
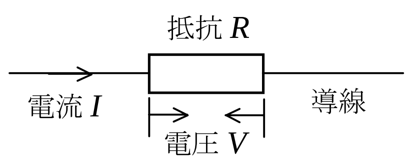


図 5.2 電流と電圧の比例関係



抵抗は長方形に図示する．導線の抵抗は 0 とする．

図 5.3 抵抗の記号

電流が抵抗から流れ出る側の電位は，流れ込む側の電位より，抵抗の値×電流の強さ だけ低い．これを**電圧降下**という．すなわち抵抗の両端での電圧降下は $V = RI$ である．

2 つの金属板を相対して，その間に電位差（電圧）があれば，両極板に電気が蓄えられる．こ

の装置を**キャパシター**（コンデンサー）という．＋極（プラス極，正極）に＋の電気量が蓄えられ，－極（マイナス極，負極）には，＋極に蓄えられる電気量と等量の－の電気量が蓄えられる．

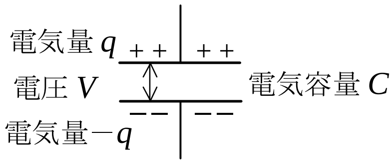


図 5.4　キャパシターの記号

キャパシターは同じ長さの
2 本の平行線で図示する．

実験によれば，両極板に蓄えられる電気量は両極板間の電位差に比例し，比例定数を**電気容量**という．電気量を q，電気容量を C，電位差を V とすれば，次式がなりたつ．

$$q = CV \tag{5.3}$$

電気量＝電気容量×電位差

電気容量 1 F（ファラド）の定義：1 F（ファラド）＝1 C（クーロン）/ V（ボルト）

図 5.5 のように，電池，抵抗，キャパシター，スイッチを回路に接続し，スイッチを閉じると，電流は電位の高い方から低い方へ流れる．しかし，電池の内部では電流は－極から＋極へ流れる．電池の＋極の電位は－極の電位より**起電力**だけ高い．

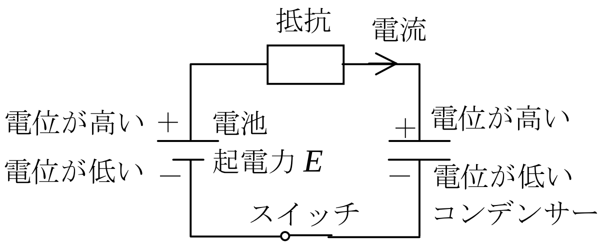


図 5.5　電気回路

電池は異なる長さの 2 本の
平行線で図示する．
長い線は＋極，短い線は－極を表す．

電流が抵抗から流れ出る側の電位は，流れ込む側の電位より，抵抗値×電流の強さ だけ低い．また，キャパシターの－極の電位は＋極の電位より $\dfrac{\text{電気量}}{\text{電気容量}}$ だけ低い．抵抗とキャパシターで電位が下がった分に等しいだけ，電池の＋極の電位は－極の電位より高い．数個の電池，抵抗，キャパシターなどを接続した電気の閉回路において，一般に，

電圧降下の和＝起電力の和　(5.4)

がなりたつ．これを**キルヒホッフの第 2 法則**という．これは，閉回路でのエネルギー保存を示す．

例 5.1 図 5.6 の電気回路で，電池の起電力を E，抵抗の値を R，キャパシターの電気容量を C とする．時刻 0 にスイッチを閉じた後，時刻 t でのキャパシターに蓄えられる（キャパシターを充電する場合の）電気量 q を求めよ．また，時定数 τ を R，C で表し，時刻 t での電気量 q のグラフを描け．最初，キャパシターに蓄えられていた電気量は 0 とする．キルヒホッフの第 2 法則にしたがって式を立てて解け．

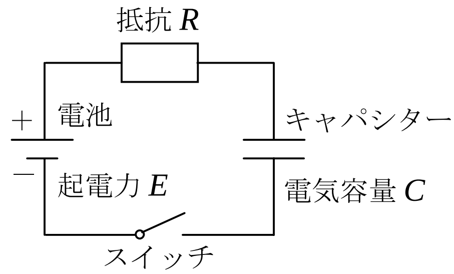


図 5.6　電気回路

解　時刻 t に抵抗を流れる電流は $I=\dfrac{dq}{dt}$ であるから，抵抗による電圧降下は RI，すなわち $R\dfrac{dq}{dt}$ である．キャパシターによる電圧降下は $\dfrac{q}{C}$ である．

キルヒホッフの第 2 法則

$$\text{電圧降下の和}=\text{起電力の和} \tag{5.4}$$

は，次式の q の t に関する微分方程式で表される．

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E \tag{5.5}$$

上式の両辺に $-\dfrac{q}{C}$ を加えて，その両辺を R で割った後，右辺を $-\dfrac{1}{RC}$ でくくれば

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{1}{RC}(q-CE) \tag{5.6}$$

上式の両辺を $q-CE$ で割って，両辺を t で積分すれば，

$$\int\frac{1}{q-CE}\frac{dq}{dt}dt=-\frac{1}{RC}\int dt \tag{5.7}$$

上式は，左辺で $\dfrac{dq}{dt}dt=dq$ を用いれば，次式になる．

$$\int\frac{1}{q-CE}dq=-\frac{1}{RC}\int dt \tag{5.8}$$

$$\therefore\quad \log\left|q-CE\right|=-\frac{1}{RC}t+C_1 \tag{4.8}$$

ここで，C_1 は積分定数である．$0\leq q<CE$ であるから，次式を得る．

$$\log\left(-q+CE\right)=-\frac{1}{RC}t+C_1 \tag{5.9}$$

$$\therefore\quad -q+CE=e^{C_1}e^{-\frac{1}{RC}t} \tag{5.10}$$

上式に $t=0$，$q=0$ を代入すれば，$e^{C_1}=CE$ を得る．したがって，

$$q=CE\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \tag{5.11}$$

時定数は $\tau = RC$ である．グラフは，図 5.7 となる．ただし，$a = CE$ とした．

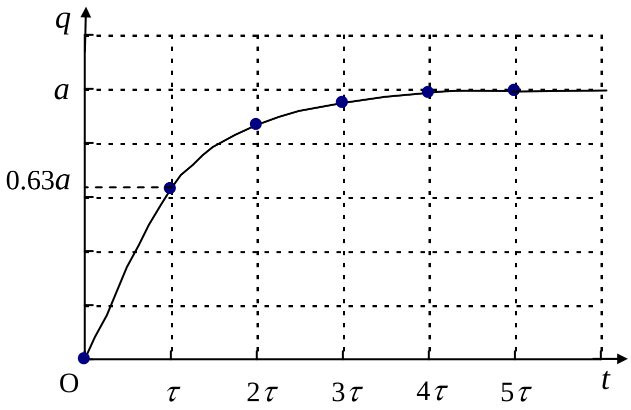


図 5.7　キャパシターを充電する場合の電気量と時間の関係

上図において，$t \to \infty$ では，$q \to CE$ である．$t = \tau$ のとき，キャパシターに蓄えられる電気量は CE の約 63%である．スイッチを閉じて，十分な時間が経てば，キャパシターに蓄えられる電気量は CE となり，回路に流れる電流は $I = 0$ となる．スイッチを閉じた瞬間，キャパシターに蓄えられている電気量は 0 であり，キャパシターの極板間の電圧は 0 であるから，回路に流れる電流は $I = \dfrac{E}{R}$ となる．

例 5.2　例 5.1 で，キャパシターの電気容量 C が $10\,\mu\mathrm{F}$ のとき，時定数 τ を $100\,\mu\mathrm{s}$ にするには，抵抗の値 R は何 Ω にしたらよいか．スイッチを閉じて，$500\,\mu\mathrm{s}$ 後の，$e^{-\frac{1}{RC}t}$ の値を四捨五入により有効数字 1 桁まで求めよ．$1\,\overset{\text{セカント}}{\mathrm{s}} = 1\,\overset{\text{オーム}}{\Omega} \cdot \overset{\text{ファラド}}{\mathrm{F}}$，$\overset{\text{マイクロ}}{\mu} = 10^{-6}$ である．

解　$\tau = RC$ より，

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{100\,\mu\mathrm{s}}{10\,\mu\mathrm{F}} = 10\,\Omega$$

$$e^{-\frac{1}{RC}t} = e^{-\frac{500\mu\mathrm{s}}{100\mu\mathrm{s}}} = e^{-5} = 2.72^{-5} = \frac{1}{149} \fallingdotseq 0.007$$