6. まとめ

例 4.1 では，速度に比例した抵抗力と重力を受けた雨粒の落下運動について，その運動方程式

$$m\frac{dv}{dt}=mg-cv \tag{4.4}$$

は，速度の時刻に関する次の微分方程式で表された．

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{c}{m}(v-\frac{mg}{c}) \tag{4.5}$$

この微分方程式の解は，次式になった．

$$v=\frac{mg}{c}\left(1-e^{-\frac{c}{m}t}\right) \tag{4.11}$$

一方，例 5.1 では，キャパシターを充電する場合，キルヒホッフの第 2 法則を表す式

$$R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E \tag{5.5}$$

は，電気量の時刻に関する次の微分方程式で表された．

$$\frac{dq}{dt}=-\frac{1}{RC}(q-CE) \tag{5.6}$$

この微分方程式の解は，次式になった．

$$q=CE\left(1-e^{-\frac{1}{RC}t}\right) \tag{5.11}$$

力学と電気の現象を表す微分方程式（4.5）と（5.6）を，例 3.2 の変数分離形の微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{b}(y-a) \tag{3.15}$$

と比較してみよう．式（4.5）は，速度 v は変数 y に，時刻 t は変数 x に，定数 $\frac{mg}{c}$ は定数 a に，定数 $\frac{m}{c}$ は定数 b に置きかえれば，式（3.15）になる．式（5.6）は，電気量 q を変数 y に，時刻 t を変数 x に，定数 CE を定数 a に，定数 RC を定数 b に置きかえれば，式（3.15）になる．3 つの微分方程式の関係は，下図のようになる．

力学の現象

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m}\left(v - \frac{mg}{c}\right)$$

解： $v = \dfrac{mg}{c}\left(1 - e^{-\frac{c}{m}t}\right)$

電気の現象

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}(q - CE)$$

解： $q = CE\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$

変数変換 : $v \to y$，$t \to x$

$\dfrac{mg}{c} \to a$，$\dfrac{m}{c} \to b$

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{b}(y - a)$$

解： $y = a\left(1 - e^{-\frac{1}{b}x}\right)$

変数変換 : $q \to y$，$t \to x$

$CE \to a$，$RC \to b$

図 5.8　力学と電気の現象を表す式と変数分離形の微分方程式の間の関係

以上から，ここで挙げた力学と電気の一見異なる現象が，数学的には同じ形式の微分方程式で表されることが分かった．その解である速度と電気量は，時刻に関する指数関数で表されることも分かった．

問　上述以外の自然現象や経済現象においても，変数分離形の微分方程式で表されて，その解が指数関数で表される現象がある．そのような例を見つけて，比較・考察せよ．