

6. まとめ

例 4.1 では、速度に比例した抵抗力と重力を受けた雨粒の落下運動について、その運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = mg - cv \quad (4.4)$$

は、速度の時刻に関する次の微分方程式で表された。

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m}(v - \frac{mg}{c}) \quad (4.5)$$

この微分方程式の解は、次式になった。

$$v = \frac{mg}{c} \left(1 - e^{-\frac{c}{m}t} \right) \quad (4.11)$$

一方、例 5.1 では、キャパシターを充電する場合、キルヒ霍ッフの第 2 法則を表す式

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \quad (5.5)$$

は、電気量の時刻に関する次の微分方程式で表された。

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC}(q - CE) \quad (5.6)$$

この微分方程式の解は、次式になった。

$$q = CE \left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t} \right) \quad (5.11)$$

力学と電気の現象を表す微分方程式 (4.5) と (5.6) を、例 3.2 の変数分離形の微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{b}(y - a) \quad (3.15)$$

と比較してみよう。式 (4.5) は、速度 v は変数 y に、時刻 t は変数 x に、定数 $\frac{mg}{c}$ は定数 a

に、定数 $\frac{m}{c}$ は定数 b に置きかえれば、式 (3.15) になる。式 (5.6) は、電気量 q を変数 y に、

時刻 t を変数 x に、定数 CE を定数 a に、定数 RC を定数 b に置きかえれば、式 (3.15) になる。3 つの微分方程式の関係は、下図のようになる。

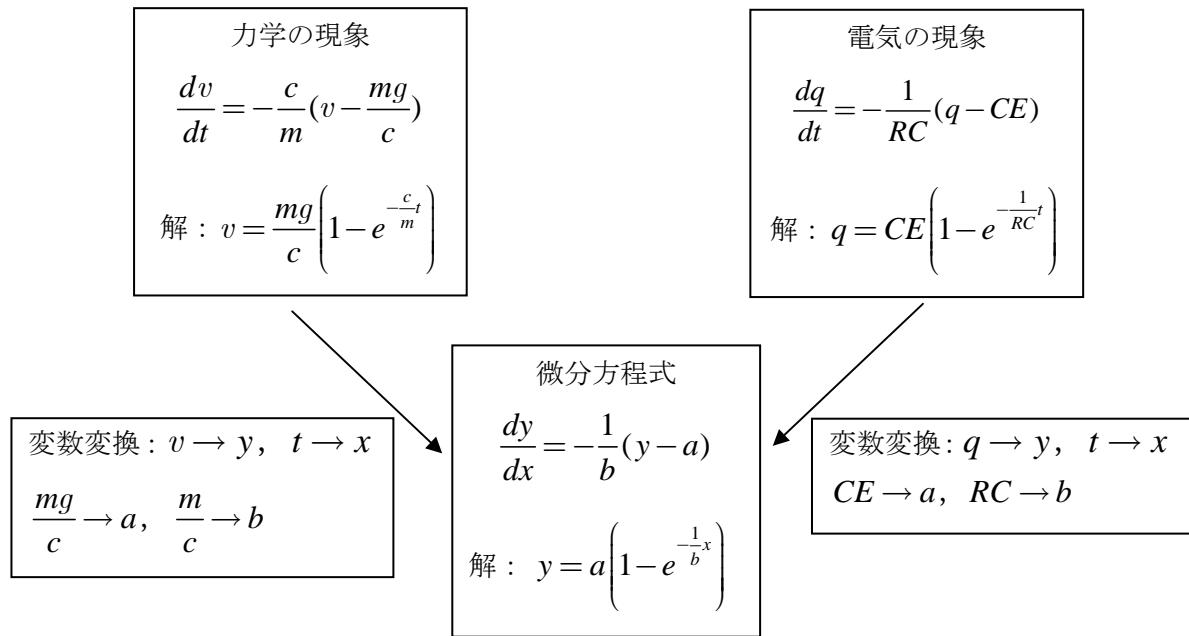


図 5.8 力学と電気の現象を表す式と変数分離形の微分方程式の間の関係

以上から、ここで挙げた力学と電気の一見異なる現象が、数学的には同じ形式の微分方程式で表されることが分かった。その解である速度と電気量は、時刻に関する指數関数で表されることも分かった。

問 上述以外の自然現象や経済現象においても、変数分離形の微分方程式で表されて、その解が指數関数で表される現象がある。そのような例を見つけて、比較・考察せよ。