４． 解の公式

a, b, c は定数で $a \neq 0$ のとき、$ax^2 + bx + c = 0$ の２次方程式の解の公式を導きます。(y が x の２次式)

２次方程式の解の公式 （因数分解できるときには因数分解を使う方が良い）

$ax^2 + bx + c = 0$ の解を求めます。($a \neq 0$)

$ax^2 + bx + c = 0$ を平方完成すると(平方完成の項参照)

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = 0$$

となります 。ここでこの式の第2項を右辺に移項し、aで割ると次式が得られる。

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$ さらに平方根を取ると $$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

よって，$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ が得られる。したがって2次方程式$ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ となる。また、$b^2 - 4ac$ (＝Dと書きこれを判別式という)が正か負か0 かに
よって次のように分かれる。

i) $b^2 - 4ac > 0$ のとき、xは実数となるので、その時の解を実数解という。この場合2つの実数解を持つ。
ii) $b^2 - 4ac = 0$ のとき、xは実数1つしか解がなく、その時の解を重解という。
iii) $b^2 - 4ac < 0$ のとき、xは虚数となるので、その時の解を虚数解という。

解と係数の関係

$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ と表されるとすると，α, β は解であり，これを展開すると

$ax^2 + bx + c = a\left\{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\right\}$ となる。ここで，両辺の x の係数，定数項を比較すると

$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ が成り立ちます。この関係を解と係数の関係といいます。つまり、

２次方程式$ax^2 + bx + c = 0$ の２つの解を α, β とすると、

２つの解の和は $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ で表され、２つの解の積は $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$ で表されることになります。

例題 12 次の２次方程式を解きなさい。

(1) $2x^2 + 3x + 1 = 0$ (2) $3x^2 - 6x + 3 = 0$ (3) $2x^2 - 3x + 2 = 0$

解： (1) $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2 \times 2}$

実数解

(2) $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \times 3 \times 3}}{2 \times 3}$

$x = \dfrac{6 \pm 0}{2 \times 3} = 1$

重解

因数分解を使うと

$3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2$ より，

$x = 1$

(3) $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 2 \times 2}}{2 \times 2}$

$x = \dfrac{3 \pm \sqrt{-7}}{2 \times 2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}i}{4}$

虚数解

例題 13　$2x^2+4x+5=0$ の解をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とするとき

(1)　$\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ を求めなさい.

解 :(1)　解と係数の関係より、$\alpha+\beta=-\dfrac{4}{2}=-2$, $\alpha\beta=\dfrac{5}{2}$ となる。

(2)　$\alpha^2+\beta^2,\ \alpha^3+\beta^3$ を求めなさい.

解 :(2)　$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2,\ \therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot\dfrac{5}{2}=4-5=-1$ となる。

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ と因数分解できるので、$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=-2\cdot(-1-\dfrac{5}{2})=7$ となる。