

1. 指数が有理数の場合の指数法則

一般に、指数が有理数のときにも、指数法則が成り立ちます。

指数が有理数の指数法則

$a > 0, b > 0$ で、 r, s が有理数のとき、

$$1. a^r a^s = a^{r+s}$$

$$2. (a^r)^s = a^{rs}$$

$$3. (ab)^r = a^r b^r$$

例題1 指数が有理数の場合の指数法則を用いて計算しなさい。

$$(1) 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{6}}$$

$$(2) a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} \div a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{4+3-1}{6}} = a^{\frac{6}{6}} = a^1 = a$$

$$(3) \left(b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = b^{\frac{3}{2} \times \frac{1}{4}} = b^{\frac{3}{8}}$$

$$(4) 16^{\frac{3}{4}} \times 27^{\frac{2}{3}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} \times (3^3)^{\frac{2}{3}} = 2^{4 \times \frac{3}{4}} \times 3^{3 \times \frac{2}{3}} = 2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$$

$$(5) (6 \times 8)^{\frac{1}{2}} = ((2 \times 3) \times 2^3)^{\frac{1}{2}} = (2^4 \times 3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{4}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = 2^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = 4 \times 3^{\frac{1}{2}}$$

$$(6) \frac{\sqrt[3]{(ab)^6}}{\sqrt{a^6 b^{-4}}} = \frac{(ab)^{\frac{6}{3}}}{(a^6 b^{-4})^{\frac{1}{2}}} = (ab)^2 \times (a^6 b^{-4})^{-\frac{1}{2}} = a^2 b^2 \times a^{-\frac{6}{2}} b^{(-4) \times (-\frac{1}{2})} = a^2 b^2 \times a^{-3} b^2 = a^{2+(-3)} b^{2+2} = a^{-1} b^4 = \frac{b^4}{a}$$

* 累乗根は指数に直して計算します。

例題2 次の式を展開して計算しなさい。

$$(1) (a + a^{-1})^2 = a^2 + 2 \times a \times a^{-1} + (a^{-1})^2 = a^2 + 2a^{1+(-1)} + a^{-2} = a^2 + 2a^0 + a^{-2} = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$$

* $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の利用

$$(2) \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right) \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(b^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a - b$$

* $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ の利用