2．対数の性質

$a>0$，$a\neq 1$ のとき、　$a^0=1$，$a^1=a$　だから、対数の定義より次の等式が得られます。

$$\log_a 1=0,\quad \log_a a=1$$

対数には、その定義と指数法則より、以下の性質があります。

対数の性質

$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ のとき、

性質Ⅰ．　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

性質Ⅱ．　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

性質Ⅲ．　$\log_a M^p=p\log_a M$

底の変換公式

$a>0$，$a\neq 1$，$b>0$，$c>0$，$c\neq 1$ のとき、

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　← 重要です。（底を $\underline{a\to c}$ に変換）

例題２　次の式を計算しなさい。〔対数の性質Ⅰ～Ⅲの利用〕

(1)　$\log_2 3+\log_2 5=\log_2(3\times 5)=\log_2 15$

(2)　$\log_3 18-\log_3 2=\log_3\dfrac{18}{2}=\log_3 9=\log_3 3^2=2\log_3 3=2\times 1=2$

(3)　$\log_2 3+\log_2 6-\log_2\dfrac{1}{2}=\log_2(3\times 6\times 2)=\log_2(3^2\times 2^2)=2\log_2 3+2\log_2 2=2\log_2 3+2$

(4)　$\log_2\sqrt[4]{8}=\log_2 8^{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{4}\log_2 2^3=\dfrac{1}{4}\times 3\log_2 2=\dfrac{3}{4}$

別解：　$\log_2\sqrt[4]{8}=\log_2(2^3)^{\frac{1}{4}}=\log_2 2^{\frac{3}{4}}=\dfrac{3}{4}\log_2 2=\dfrac{3}{4}$

(5)　$3\log_3\sqrt[3]{5}-\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{25}{9}=\log_3(\sqrt[3]{5})^3-\log_3\left(\dfrac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}}=\log_3 5-\log_3\dfrac{5}{3}=\log_3\left(5\times\dfrac{3}{5}\right)=\log_3 3=1$

例題３　次の計算をしなさい。〔底の変換公式の利用〕

(1)　$\log_4 32=\dfrac{\log_2 32}{\log_2 4}$　← 2 を新しい底として変換
（底の 4 は $4=2^2$ で、底を $4\to 2$ に変換すると対数計算が簡単になります。）

$=\dfrac{\log_2 2^5}{\log_2 2^2}=\dfrac{5\log_2 2}{2\log_2 2}=\dfrac{5}{2}$

(2)　$\log_2 3\times\log_3 4$　← 底が異なっているので、底をそろえて計算する。

① 底を 2 にそろえると → $\log_2 3\times\log_3 4=\log_2 3\times\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}=\log_2 4=\log_2 2^2=2\log_2 2=2$

② 底を 3 にそろえると → $\log_2 3\times\log_3 4=\dfrac{\log_3 3}{\log_3 2}\times\log_3 2^2=\dfrac{1}{\log_3 2}\times 2\log_3 2=1\times 2=2$

(3)　$\log_2 3-\log_4 36=\log_2 3-\dfrac{\log_2 36}{\log_2 4}=\log_2 3-\dfrac{\log_2 6^2}{2\log_2 2}=\log_2 3-\dfrac{2\log_2 6}{2}$

$=\log_2 3-\log_2 6=\log_2\dfrac{3}{6}=\log_2\dfrac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-\log_2 2=-1$